

# **A Mathematicians' View of Geometrical Unification of General Relativity and Quantum Physics**

**La physique vue autrement  
L'univers sans foi ni loi**

*Comment regarder intelligemment un univers totalement anarchique*

Michel Vaugon

*Ancien professeur de mathématiques et directeur de thèses  
de l'Université Pierre et Marie Curie*

`michel.vaugon@gmail.com`

Octobre 2015

## Abstract

This document contains a description of physics entirely based on a geometric presentation : all of the theory is described giving only a pseudo-riemannian manifold  $(M, g)$  of dimension  $n > 5$  for which the  $g$  tensor is, in studied domains, almost everywhere of signature  $(-, -, +, \dots, +)$ . No object is added to this space-time, no general principle is supposed. The properties we impose to some domains of  $(M, g)$  are only simple geometric constraints, essentially based on the concept of “curvature”. These geometric properties allow to define, depending on considered cases, some objects (frequently depicted by tensors) that are similar to the classical physics ones, they are however built here only from the  $g$  tensor. The links between these objects, coming from their natural definitions, give, applying standard theorems from the pseudo-riemannian geometry, all equations governing physical phenomenons usually described by classical theories, including general relativity and quantum physics. The purely geometric approach introduced here on quantum phenomena is profoundly different from the standard one. Neither Lagrangian or Hamiltonian is used. This document ends with a quick presentation of our approach of complex quantum phenomena usually studied by quantum field theory.

## Résumé

Ce texte propose une description de la physique fondée entièrement sur une présentation géométrique : toute la théorie est décrite à partir de la simple donnée d'une variété pseudo-riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$  de dimension  $n > 5$  pour laquelle le tenseur  $g$  est, dans les domaines étudiés, presque partout de signature  $(-, -, +, \dots, +)$ . Aucun *objet* n'est ajouté à cet *espace-temps*, aucun principe général n'est supposé. Les propriétés particulières que l'on impose à certains domaines de  $(\mathcal{M}, g)$  sont de simples conditions géométriques essentiellement basées sur la notion de courbure. Ces *propriétés géométriques* permettent de définir, suivant les cas considérés, des *objets* (souvent représentés par des tenseurs) qui s'apparentent à ceux de la physique classique mais qui, ici, ne sont construits qu'à partir du tenseur  $g$ . Les liens de dépendance entre ces objets, qui viennent de leurs définitions naturelles, permettent d'obtenir, par la seule application de théorèmes standard de géométrie pseudo-riemannienne, toutes les équations qui gèrent la description des phénomènes physiques habituellement décrits par les théories classiques, y compris la théorie de la relativité générale et la physique quantique. Aucun *lagrangien* ou *hamiltonien* n'est utilisé. Les domaines de l'espace-temps  $(\mathcal{M}, g)$  que l'on étudie sont localement difféomorphes à  $\Theta \times K$  où  $\Theta$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^4$  et  $K$  est une variété compacte. Le premier signe négatif de la signature de  $g$  est relatif à  $\Theta$ , le second signe négatif (correspondant à une autre notion de « temps ») est relatif à  $K$  et celui-ci est un ingrédient essentiel dans la description de l'électromagnétisme.

Deux types différents d'approximations permettent de retrouver les équations habituelles de la physique :

- Un premier type d'approximations consiste à négliger certains phénomènes liés à la variété compacte  $K$  et ceci permet de retrouver les équations de la physique non quantique (la relativité générale incluant l'électromagnétisme).

- Un deuxième type d'approximations consiste à supposer que le tenseur  $g$  est « lié » à la métrique de Minkovski sur  $\Theta$ , mais dans ce cas on tient compte précisément des caractéristiques de la variété compacte  $K$ . On retrouve alors en particulier les résultats qualitatifs et quantitatifs habituellement obtenus par la physique quantique classique, ceci sans utiliser la moindre axiomatique de cette dernière. Le regard purement géométrique proposé ici sur les phénomènes quantiques est profondément différent de celui des théories standard.

Ce texte se termine par une présentation rapide de la manière dont on aborde, avec la théorie présentée ici, l'étude des phénomènes quantiques complexes traités par la théorie quantique des champs.

## Avant-propos

Ce que je vais présenter ici peut être considéré comme le prolongement de ce qui a été écrit dans les manuscrits [4], [5] et [6] puis dans l'article [7]. Cependant, la présentation sera telle qu'il n'est pas nécessaire de consulter ceux-ci pour la lecture de ce papier.

Cette théorie a été élaborée avec la participation amicale de :

- Stéphane Collion : Docteur d'Université en Mathématiques, agrégé de Mathématiques, commandant de bord à Air-France.
- Marie Dellinger : Docteur d'Université et agrégée de Mathématiques, professeur en classe préparatoire à l'ENCPB.
- Zoé Faget : Docteur d'Université en Mathématiques, Docteur d'Université en Informatique, Maître de conférences à l'Université de Poitiers, détachée en CPGE.
- Emmanuel Humbert : Docteur d'Université et agrégé de Mathématiques, professeur et directeur de thèses de l'Université de Tours.
- Benoît Vaugon : Mathématicien, Physicien, Docteur d'Université en Informatique.
- Claude Vaugon : Professeur agrégée de Mathématiques au lycée Jean de La Fontaine de Château-Thierry.

## Introduction

Ce papier commence par un exposé rapide des considérations qui nous ont amenées à la théorie qui va être présentée ici. Elles sont liées au regard (personnel) porté sur la physique du siècle dernier que je résume en trois étapes caractéristiques qui concernent ce que l'on appelle communément la « physique classique » (non quantique).

### 1<sup>ère</sup> étape

L'espace-temps est modélisé par  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  (ou mieux par un espace affine),  $\mathbb{R}$  pour le temps considéré comme absolu,  $\mathbb{R}^3$  pour l'espace que l'on suppose muni du produit scalaire euclidien. Dans cet espace existent des « objets physiques » que l'on modélise par des « courbes » de l'espace (pour des particules par exemple), des champs de tenseurs : fonctions, champs de vecteurs, formes différentielles, etc. (pour des « fluides », des champs électriques et magnétiques, des fonctions densité de masse ou de charge électrique, par exemples). On considère que ces objets physiques n'ont aucune influence sur les notions de temps et de distance données d'une manière absolue dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ . Ces objets sont régis par des **lois** et respectent certains **principes**. Ces lois sont écrites relativement à des observateurs particuliers de l'espace-temps que l'on qualifie souvent d'« observateurs galiléens ». On peut citer : les lois de Newton pour la gravitation, les lois de Maxwell pour l'électromagnétisme. Les principes admis sont : l'invariance des lois lors des changements d'observateurs galiléens, l'homogénéité et l'isotropie de l'espace. Ce modèle est mis en défaut essentiellement par la constatation expérimentale de la constance absolue de la vitesse de la lumière et le fait que les équations de Maxwell ne sont pas invariantes lors des changements d'observateurs galiléens. Ce qui amène à la deuxième étape.

### 2<sup>ème</sup> étape (la théorie de la relativité restreinte)

L'espace-temps est modélisé par  $\mathbb{R}^4$  (ou mieux un espace affine) qui est maintenant muni d'une forme quadratique de Lorentz :  $q(t, x, y, z) = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2$ . Les notions d'espace et de temps sont alors intimement liées (le temps n'est plus absolu). Ce modèle rend parfaitement cohérent le fait que la vitesse de la lumière soit une constante absolue. Les objets physiques sont modélisés comme on l'a présenté dans la première étape et il n'ont toujours aucune influence sur les notions de temps et de distance données par la forme quadratique de Lorentz. Les lois de Maxwell respectent maintenant le nouveau principe d'invariance par transformations de Lorentz (qui remplacent les transformations de Galilée). Cependant, les lois de Newton, servant à décrire les phénomènes gravitationnels, deviennent totalement inadaptées à ce nouvel espace-temps (muni de la forme quadratique de Lorentz). L'idée fondamentale qui résout le problème est dans la troisième étape.

### 3<sup>ème</sup> étape (la théorie de la relativité générale)

L'espace-temps est maintenant modélisé par une variété  $\mathcal{M}$  de dimension 4 munie d'un tenseur lorentzien  $g$  dont la signature, en chaque point de  $\mathcal{M}$ , est  $(-, +, +, +)$ . Autrement dit, l'espace tangent en chaque point de  $\mathcal{M}$  est muni d'une forme quadratique de Lorentz. Les objets physiques sont encore représentés par des champs de tenseurs définis sur la variété  $\mathcal{M}$ . À chaque

objet présent dans un domaine de la variété est associé son tenseur d'« énergie-impulsion » qui est un champ de formes quadratiques.

La loi fondamentale de la physique est donnée par l'équation d'Einstein qui stipule que le tenseur d'énergie-impulsion, qui caractérise les objets se trouvant dans un domaine de la variété, est égal à la courbure d'Einstein (pour un bon choix « d'unités »). Il y a donc maintenant un lien étroit entre la notion d'espace-temps et les objets physiques eux-mêmes. L'électromagnétisme s'introduit très naturellement dans cet espace-temps et l'« objet » qui le caractérise est une 2-forme différentielle  $F$  à laquelle on associe son tenseur d'énergie-impulsion. La 2-forme différentielle  $F$  est supposée vérifier les « lois de Maxwell » dont les opérateurs différentiels s'expriment maintenant à partir du tenseur lorentzien  $g$ .

Cette représentation de la physique fonctionne très bien pour ce qui concerne la gravitation et l'électromagnétisme (en négligeant les effets quantiques). Elle permet en particulier de décrire des phénomènes inattendus, représentés par des « singularités » de l'espace-temps, que sont le big-bang, les trous noirs, etc. Bien entendu, les modèles présentés dans la première et la deuxième étape apparaissent alors comme des approximations de domaines particuliers de la théorie de la relativité générale. On pourra remarquer que dans cette théorie, aucun « principe » ne subsiste, l'homogénéité et l'isotropie ou plus généralement l'invariance sous l'action de certains groupes d'isométries que l'on suppose parfois, ne sont que des **approximations** qui permettent de faire des calculs approchés mais ne sont évidemment pas des principes généraux.

Dans les 3 étapes que je viens de décrire, les « lois de la physique » sont données par des équations différentielles qui lient les objets que l'on a choisis de faire intervenir dans l'espace-temps. Un autre point de vue consiste à utiliser le **principe lagrangien** : au lieu de donner axiomatiquement les lois de la physique sous forme d'équations différentielles, on donne, pour un domaine de l'espace-temps contenant des objets physiques, une **action** qui va caractériser le comportement de ces objets. L'action est une application à valeurs réelles dont les « variables » sont les objets considérés. L'« axiome » consiste alors à dire que certains de ces objets forment un point stationnaire de l'action (la minimisent, par exemple). Mathématiquement, cela se traduit par le fait que ces objets vérifient des équations différentielles (celles qu'on aurait pu se donner comme axiome). En résumé, au lieu de donner directement les équations différentielles, on préfère se donner une « action » à partir de laquelle on déduira les équations. Un intérêt de ce point de vue est que, souvent, l'expression de l'« action » est plus « esthétique », voire plus « intuitive » que les équations différentielles elles-mêmes (bien que dans de nombreux cas, historiquement, on ait d'abord trouvé les équations avant de deviner l'action). Cependant, la notion de « lagrangien » a d'autres avantages : elle permet parfois de simplifier considérablement la présentation des calculs dans certains problèmes physiques, mais l'importance accordée actuellement à la notion de lagrangien (et à son détournement en hamiltonien) est essentiellement due au fait que cette notion est indispensable dans l'axiomatique des théories physiques qui traitent des phénomènes qui ne sont pas décrits par la « physique classique » et que je nommerai les « phénomènes quantiques ». Dans les théories qui tentent de décrire les phénomènes quantiques, je classerai : la mécanique quantique classique, la théorie quantique des champs, la théorie des cordes, etc. Ces théories se sont développées (disons depuis un siècle) parallèlement aux théories de la physique classique que j'ai présentées dans les étapes 2 et 3. Les procédures utilisées pour décrire les phénomènes (quantiques) observés sont très différentes de celles utilisées en physique

classique. Si l'on part très souvent là aussi d'une « action » liée aux objets physiques étudiés, l'axiomatique utilisée est très éloignée de celle de la physique classique : on ne cherche plus des « points stationnaires » à l'action, mais on décrit des processus qui permettent, à partir de l'action (modifiée), d'obtenir des densités de probabilités pour les grandeurs caractéristiques de ces objets. En fait, ces théories ont fait l'objet de travaux considérables ces dernières décennies et ne peuvent certainement pas être résumées en quelques lignes. Une description plus précise n'aurait pour nous que peu d'intérêt car c'est avec un **tout autre point de vue** que nous allons décrire les phénomènes quantiques. Ce point de vue pourra être considéré plutôt comme un prolongement de la théorie de la relativité générale, cependant, de nombreux points communs avec la théorie quantique des champs apparaîtront naturellement que le lecteur familier avec cette théorie pourra remarquer.

Dans toute la physique que l'on va présenter dans ce papier, la notion de lagrangien-hamiltonien sera **complètement abandonnée**. Elle sera, en quelque sorte, remplacée par la notion de « type géométrique » conceptuellement profondément différente.

Ce que je vais écrire maintenant peut être considéré comme l'étape qui suit celles que j'ai commencées à présenter et l'on peut, pour le moment, ne pas tenir compte de ce que j'ai dit sur les phénomènes quantiques.

#### 4<sup>ème</sup> étape

L'espace-temps est modélisé par une variété  $\mathcal{M}$  de dimension  $n > 5$ , munie d'un tenseur pseudo-riemannien  $g$  défini presque partout sur  $\mathcal{M}$  (un commentaire sur ce choix est proposé dans l'annexe 3.10). **Aucun objet physique n'est « ajouté » dans cet espace-temps.** Les « objets physiques » étudiés, qui correspondent aux notions habituelles, ne sont que des caractéristiques de la géométrie de la variété pseudo-riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$ . **Aucune loi, aucun principe n'est postulé.** Les équations liant les objets physiques (que l'on définit uniquement à partir de la géométrie de  $(\mathcal{M}, g)$ ) ne sont que des résultats donnés par des théorèmes mathématiques standard sur les variétés pseudo-riemanniennes (souvent des conséquences des identités de Bianchi dans le cas de la physique « non-quantique »). La variété pseudo-riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$  est donc supposée être « totalement anarchique ». Faire de la physique dans cet « espace-temps totalement anarchique » se résume à **constater** que certains domaines ont des caractéristiques géométriques particulières. Ces caractéristiques particulières permettent de définir des « objets » (qui n'ont de sens que dans ce type de domaine) et les équations liant ces objets sont alors des conséquences mathématiques de leurs définitions.

Donnons un premier exemple simple pour préciser ce que l'on vient de dire. Sur cet exemple, le lecteur peut considérer que  $(\mathcal{M}, g)$  est l'espace-temps habituel de la relativité générale pour lequel  $\dim \mathcal{M} = 4$  et  $g$  est de signature  $(-, +, +, +)$ , bien que cela ne sera plus le cas ensuite. Supposons qu'en chaque point d'un domaine  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{M}$ , la courbure d'Einstein (considérée comme un endomorphisme de l'espace tangent) admette une valeur propre négative dont l'espace propre est de dimension 1 et de genre temps. Supposons de plus qu'elle s'annule sur le sous-espace  $g$ -orthogonal à cet espace propre. On peut alors définir, sans ambiguïtés, sur ce domaine :

- Une fonction  $\mu : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  qui, à chaque point de  $\mathcal{D}$ , fait correspondre la valeur absolue de la valeur propre de la courbure d'Einstein.

- Un champ de vecteurs  $X$ , qui en chaque point de  $\mathcal{D}$ , est le vecteur unitaire (c.a.d qui vérifie  $g(X, X) = -1$ ) dans l'orientation en temps, de l'espace propre de dimension 1.

Un tel couple  $(\mathcal{D}, g)$  sera appelé un domaine de type « fluide sans pression » car, si l'on réutilise le langage de la physique habituel, la fonction  $\mu$  sera, par définition, la **fonction densité d'énergie** du fluide. Le flot du champ de vecteur  $X$  sera le **flot du fluide**. Le choix de la nullité de la courbure d'Einstein sur le sous-espace  $g$ -orthogonal à l'espace propre traduira la nullité de la pression.

Le lecteur peut alors vérifier (après quelques calculs) que la seule application de la seconde identité de Bianchi sur la courbure d'Einstein, redonne les équations standard de la relativité générale sur les fluides sans pression, qui apparaissent donc bien ici comme une simple conséquence mathématique des définitions données. (Bien entendu, cet exemple sera repris plus loin dans un cadre plus général).

Voici un second exemple qui décrit un ingrédient essentiel dans la description de certains phénomènes quantiques. Ici, la dimension de  $\mathcal{M}$  est nécessairement  $> 5$  et la signature de  $g$  particulière : on dira qu'un domaine  $\mathcal{D}$  de  $(\mathcal{M}, g)$  est de type « métrique oscillante dans un potentiel neutre » si la métrique pseudo-riemannienne  $g$  est conforme à une métrique  $g_0$  (c'est à dire de la forme  $g = fg_0$  où  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ) et est de plus à courbure scalaire constante égale à celle de  $g_0$ . La métrique pseudo-riemannienne  $g_0$  est une métrique « de référence », c'est celle avec laquelle sont effectuées les mesures, elle sera choisie de telle sorte que, restreinte à l'« espace apparent » (de dimension 4), ce soit la métrique de Minkovski (bien que l'on puisse généraliser cet état de fait). Ce domaine (légèrement modifié par des « singularités ») représentera ce que l'on appelle dans le langage habituel des « particules dans le vide ». Contrairement au premier exemple, il est difficile au premier abord de voir le lien existant entre un tel domaine  $(\mathcal{D}, g)$  et la notion habituelle de particules, et effectivement la théorie que l'on va présenter va s'éloigner clairement des théories quantiques standard sur les particules.

Tout ceci sera bien sûr détaillé dans le chapitre 2 de ce papier où l'on montrera en particulier qu'avec ce nouveau « regard », on retrouve bien la description qualitative et quantitative des expériences de la physique quantique classique en obtenant des équations de type « Klein-Gordon » qui donneront en approximation les équations de Schrödinger standard qui décrivent le comportement des particules dans le vide ou dans un potentiel.

La physique telle que je vais la présenter va donc être ramenée à la recherche de domaines de l'espace-temps qui seront de type (géométrique) « humainement intéressant ».

Comme je l'ai déjà dit, un **type** sur un domaine est une condition **géométrique** supposée sur ce domaine (je viens d'en donner deux exemples). Il sera « humainement intéressant » s'il est « suffisamment déterministe ». Cette dernière notion peut être définie mathématiquement de la manière suivante (elle mériterait des définitions bien plus précises que celle que je vais donner, mais ce n'est pas l'objet de ce papier (voir l'annexe 3.11)) : un domaine typé  $(\Omega, g)$  est « suffisamment déterministe » si la connaissance de certaines grandeurs géométriques sur un sous-domaine  $\Omega'$  de  $\Omega$  entraîne la connaissance de ces mêmes grandeurs sur tout  $\Omega$ .

En géométrie pseudo-riemannienne, les résultats qui permettent d'obtenir des propriétés de ce genre sont appelés des **théorèmes de rigidité**. En pratique, cela revient à montrer que les conditions géométriques qui définissent le type donnent des équations sur les grandeurs géométriques concernées qui ont des solutions uniques pour des « conditions initiales » précisées (qui



sont les données de ces grandeurs sur  $\Omega'$ ). Il ne faut pas oublier que  $(\Omega, g)$  contient la notion habituelle de « temps » et que de tels résultats de rigidité veulent dire, dans le langage commun, que des conditions initiales identiques sur les grandeurs donnent toujours la même évolution dans le temps de ces grandeurs, ce qui justifie le caractère « humainement intéressant » de ces domaines typés.

Il est important de noter que les domaines typés que je vais définir ne sont en général que des **approximations**. Si l'on reprend le premier exemple, on peut considérer qu'il n'existe pas en réalité de domaines qui sont exactement de type « fluide sans pression » mais que, dans certaines circonstances, ces domaines constituent une bonne approximation (utilisée par exemple à très grande échelle pour décrire l'expansion de l'univers dans un domaine de l'espace-temps contenant un singularité de type « big-bang »). Le second exemple, qui définit un domaine de type « métrique oscillante » peut lui aussi, bien sûr, être considéré comme une approximation (le domaine  $\Omega$  de cet exemple peut éventuellement être vu comme un sous-domaine du premier exemple, mais dans ce cas, le tenseur pseudo-riemannien choisi correspond à une « approximation locale » totalement différente de l'« approximation globale » du premier exemple).

En fait, les domaines typés que je vais définir se séparent naturellement en deux classes qui proviennent du fait que les expériences se séparent en deux catégories distinctes :

- Celles dont les **mesures** des grandeurs concernées ne modifient en rien (ou n'ont qu'une influence négligeable sur) leur déroulement. Ces expériences sont communément décrites par la physique classique.
- Celles dont les **mesures** modifient fondamentalement le déroulement de l'expérience. Dans ce cas, la description de l'expérience est plus délicate car elle doit inclure le processus de mesure lui-même. J'utiliserai la terminologie « phénomène quantique » lorsque l'on s'intéressera à ce type d'expérience dans le chapitre 2.

Les domaines typés qui vont correspondre à la première catégorie et décrire la « physique classique » vont souvent être définis à partir de la courbure d'Einstein :  $(Ric - \frac{1}{2}Sg)$  où  $Ric$  est la courbure de Ricci,  $S$  la courbure scalaire et  $g$  le tenseur pseudo-riemannien. Ceci est très naturel car la seconde identité de Bianchi dit simplement que la divergence de la courbure d'Einstein est nulle. Lorsque cette propriété de divergence nulle pourra se « transmettre » à un champ de vecteurs défini canoniquement à partir de la courbure d'Einstein (pour un choix de domaine typé), le théorème de Stokes donnera une **loi de conservation** pour la grandeur liée au flux de ce champ de vecteurs, et ceci est une caractéristique importante qui permettra de considérer que ce domaine typé est suffisamment déterministe. C'est à cause de cette simple propriété de nullité de la divergence de la courbure d'Einstein que cette dernière apparaîtra plus naturellement que la courbure de Ricci dans les définitions des domaines typés présentés dans le chapitre 1.

Pour les domaines typés qui vont correspondre à la seconde catégorie, nous verrons qu'il sera important de connaître précisément le tenseur pseudo-riemannien  $g$  lui-même (et pas seulement la courbure d'Einstein par exemple). On se limitera (pour le moment) aux domaines typés dont la détermination du tenseur  $g$  se ramène à la résolution d'équations différentielles **linéaires** (pour le chapitre 2), ce qui sera suffisant pour faire le lien avec les équations de Klein-Gordon ou de Schrödinger de la physique quantique standard.

Pour ces mêmes domaines typés, qui correspondent à la seconde catégorie et décrivent les

phénomènes quantiques, va intervenir le sous-ensemble de l'espace-temps  $\mathcal{M}$  sur lequel le tenseur pseudo-riemannien  $g$  n'est pas défini. Les parties de ce sous-ensemble (qui seront des sous-variétés de  $\mathcal{M}$  de dimension  $< n$  et donc de mesure nulle) seront appelées des **singularités** du tenseur  $g$ . (Il ne faudra pas confondre ces singularités de  $g$  avec les « singularités » qui correspondent aux notions de « big-bang », de « trous noirs », etc., qui elles, ne sont pas considérées comme des parties de  $\mathcal{M}$ ).

Aucune loi ne va gérer ces singularités de  $g$  (l'espace temps est totalement « anarchique »), ce sont elles qui vont donner « l'indéterminisme » dans les phénomènes quantiques (en revanche, l'espace-temps au voisinage de ces singularités aura souvent une description précise liée au « type » considéré). Elles introduiront des propriétés de « localisation » pour les domaines correspondant à la notion de « particules ».

La variété  $\mathcal{M}$  représentant l'espace-temps va être de « grande dimension » ( $n$  probablement  $\geq 10$ ). Les domaines typés « suffisamment déterministes » qui vont permettre de retrouver en particulier les résultats habituels de la physique, seront localement difféomorphes à  $\Theta \times S^1 \times W$  où  $\Theta$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^4$ ,  $S^1$  est le cercle et  $W$  est une variété compacte. Nous verrons, de plus, que les phénomènes de « spin » pourront être décrits précisément si l'on décompose  $W$  sous la forme  $S^3 \times V$  où  $S^3$  est la sphère standard de dimension 3. Le tenseur pseudo-riemannien  $g$  aura presque partout une signature  $(-, +, +, +, -, +, \dots, +)$  ce qui donnera une notion de temps « double » liée aux deux signes  $(-)$  (placés arbitrairement en première et cinquième position). Dans de nombreux cas, (et lorsque  $g$  est transporté localement sur  $\Theta \times S^1 \times W$ ) ce temps double sera paramétré par  $(t, u) \in \mathbb{R} \times S^1$ , «  $t$  » pourra s'assimiler au temps habituel et «  $u$  » sera une notion de temps tout à fait nouvelle. Nous verrons que toutes les notions liées à l'électromagnétisme viendront de cette nouvelle notion de temps paramétré par  $u \in S^1$  (considéré ici comme la cinquième dimension) et ceci que ce soit pour les domaines typés correspondant à la physique classique ou ceux décrivant les phénomènes quantiques. Dans les « phénomènes quantiques », la notion de **masse** sera introduite comme une **fréquence** liée à la notion de temps habituelle  $t \in \mathbb{R}$ , et la notion de charge électrique comme une **fréquence** liée à la nouvelle notion de temps  $u \in S^1$  (ce qui obligera la charge électrique à être un multiple entier d'une charge élémentaire). C'est ce choix qui permettra de retrouver, en approximation, les résultats de la physique quantique standard obtenus à partir des équations de Schrödinger qui décrivent le comportement des « particules dans un potentiel ». Le fait que la signature de  $g$  ait exactement deux signes  $(-)$  s'imposera dans cette étude (chapitre 2, section 2.14). Les dimensions au delà de 5 (qui, localement, concernent  $W$ , donc) seront indispensables pour les phénomènes quantiques (mais elles seront aussi très importantes dans le chapitre 1 (section 1.4), en particulier pour les domaines de type « potentiel »).

En fait, les choix de « dimension » et de « signature » s'imposent petit à petit suivant l'avancée des recherches en partant d'une présentation entièrement « géométrique » de la physique : dans la catégorie « physique classique » présentée au chapitre 1, la dimension 4 de l'espace-temps aurait suffi pour les domaines typés représentant les fluides sans électromagnétisme (il n'y aurait eu rien de bien nouveau). Pour l'électromagnétisme (non quantique) il s'est avéré nécessaire, avec notre regard sur la physique, que la dimension de l'espace-temps soit au moins 5. Ce point a été détaillé dans [7], mais dans cet article, la cinquième dimension avait été choisie « de genre espace », alors qu'elle est maintenant de « genre temps ». Si l'on en était resté là, ce

choix de signature n'aurait pas eu techniquement une grande importance (seuls quelques signes liés à la notions de charge électrique changent dans les équations obtenues). C'est dans la description des domaines de type potentiel et surtout dans l'étude des phénomènes quantiques que s'est imposé la signature de  $g$  et que la dimension de l'espace-temps a due être augmentée.

Avec le regard que l'on porte ici sur la physique, l'étude des notions qui, dans le langage habituel, correspondent aux « particules et leurs interactions », va être fondée essentiellement sur la **théorie spectrale relative à la variété compacte**  $(S^1 \times W, g|_{S^1 \times W})$ . Celle-ci est difficile et est déterminée par la forme précise de  $(W, g|_W)$ . Nous nous arrêterons dans ce papier à la décomposition de  $W$  sous la forme  $W = S^3 \times V$  où  $S^3$  est la sphère standard de dimension 3, ce qui permettra de décrire les phénomènes liés à la notion de « spin » et, en particulier, d'aborder les phénomènes d'« intrication quantique ».

Quels que soient les domaines typés étudiés dans le chapitre 1 ou 2, la dimension de l'espace-temps sera considérée toujours égale au même  $n$  (même si dans certains cas, des dimensions seront « négligées », mais ceci avec une définition mathématique précise bien sûr). On aura donc en particulier une présentation parfaitement unitaire de la « physique classique » et des « phénomènes quantiques ».

## Notations utilisées

Pour certaines notations, j'ai essayé de reprendre celles de [2] qui sont parfois différentes des notations que l'on avait utilisées dans [4], [5] et [6].

Soit  $(\mathcal{M}, g)$  une variété pseudo-riemannienne. On note :

$Ricc_g$	:	la courbure de Ricci de $g$
$S_g$	:	la courbure scalaire de $g$
$Ein_g := Ricc_g - \frac{1}{2}S_g g$	:	la courbure d'Einstein de $g$
$G := 2Ein_g$	:	deux fois la courbure d'Einstein (cela simplifiera les formules dans de nombreuses situations)
$D$	:	la dérivé covariante associée à $g$ , et lorsque $T$ est un champ de tenseur sur $\mathcal{M}$ de coordonnées $T_{(k)}^{(j)}$ , les coordonnées de $DT$ sont notées $\nabla_i T_{(k)}^{(j)}$ .

- Lorsque  $X$  est un champ de vecteurs sur  $\mathcal{M}$ , on note  $D_X$  la dérivée covariante suivant ce champ de vecteurs.
- Lorsque  $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction,  $\nabla_g f$  ou parfois  $\overrightarrow{grad} f$  désigne le **gradient** de  $f$  ( $(\nabla_g f)^j = g^{ij} \partial_i f$ ).
- $\nabla_g \cdot X$  désigne la **divergence** du champ de vecteurs  $X$  ( $\nabla_g \cdot X = \nabla_i X^i$ ).
- Plus généralement,  $\nabla_g \cdot T$  désigne la **divergence** du champ de tenseurs  $T$  (relative au premier indice). Exemple :  $(\nabla_g \cdot T)^j = \nabla_i T^{ij}$  si  $T \in \otimes^{(**)} \mathcal{M}$ .
- Lorsque  $T$  est un tenseur totalement covariant (de coordonnées  $T_{ijk\dots}$ ) et  $g$  est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur un espace vectoriel  $E$ , sa version contravariante (par  $g$ ) est notée  $T^\sharp$ .
- Lorsque  $T$  est totalement contravariant ( $T^{ijk\dots}$ ), sa version covariante (par  $g$ ) est notée  $T^\flat$ .
- Dans le cas particulier où  $B$  est une forme bilinéaire (de coordonnées  $B_{ij}$ ) on note  ${}^e B$  l'endomorphisme de  $E$  associé à  $B$  (par  $g$ ) (de coordonnées  $B^i_j = g^{ik} B_{kj}$ ).
- **La convention d'Einstein sur les sommations est utilisée tout au long de ce papier.**

## Préliminaire mathématique

Dans tout ce qui suit, l'univers est représenté par un variété différentielle  $\mathcal{M}$  de dimension  $n > 4$  munie d'un tenseur pseudo-riemannien  $g$  (défini sauf sur une partie de mesure nulle). Le tenseur  $g$  sera, dans les domaines étudiés ici, de signature  $(-, +, +, +, -, +, \dots, +)$  presque partout.

### Les atlas d'observation

Les variétés que l'on va considérer vont être localement difféomorphes à un produit  $\Theta \times K$  où  $\Theta$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $K$  une variété compacte. Il va s'avérer être simplificateur d'introduire un langage qui tient compte de cette spécificité. On va donc commencer par établir une liste de définitions qui va préciser la terminologie utilisée tout au long de ce papier. La partie **A** de ce préliminaire ne va traiter que de la structure différentielle, la partie **B** concernera la structure pseudo-riemannienne de la variété.

**A.** On considère une variété  $\mathcal{M}$  de dimension  $n$  et de classe  $C^k$  où  $k$  est suffisamment grand pour ne poser aucun problème concernant les objets définis ensuite.

**Définition 1.** Soit  $K$  une variété compacte,  $\Theta$  un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et  $\mathcal{V}$  un ouvert de  $\mathcal{M}$ .

- Un  $C^k$ -difféomorphisme  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \Theta \times K$  sera appelé un **difféomorphisme d'observation**.

- Un couple  $(\mathcal{V}, \varphi)$ , où  $\varphi : \mathcal{V} \rightarrow \Theta \times K$  est un difféomorphisme d'observation, sera appelé **une carte sur  $\mathcal{M}$  à valeurs dans  $\Theta \times K$**

**Définition 2.** Soient  $\mathcal{D}$  un ouvert de  $\mathcal{M}$  et  $K$  une variété compacte.

Un  **$K$ -atlas d'observation** sur  $\mathcal{D}$  est une famille de cartes  $(\mathcal{V}_i, \varphi_i)_{i \in I}$  sur  $\mathcal{D}$  à valeurs dans  $\Theta \times K$  qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1.  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i = \mathcal{D}$
2.  $\forall (i, j) \in I^2, \forall x \in \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j \quad \varphi_i^{-1}(\{x_i^1\} \times K) = \varphi_j^{-1}(\{x_j^1\} \times K)$  où  $x_i^1$  désigne la composante de  $\varphi_i(x)$  sur  $\Theta_i$ .

La condition 2 est importante, elle permettra de définir sans ambiguïté, en chaque point  $x$  de  $\mathcal{D}$ , une sous-variété difféomorphe à  $K$  (relative à la donnée d'un atlas d'observation).

**Proposition 1.** Soient  $\mathcal{D}$  une variété de dimension  $n$  et  $K$  une variété compacte de dimension  $m$ . Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes :

1. Il existe un  $K$ -atlas d'observation sur  $\mathcal{D}$ .
2. Il existe une variété  $B$  de dimension  $(n - m)$  et une submersion  $\pi : \mathcal{D} \rightarrow B$  telles que le triplet  $(\mathcal{D}, B, \pi)$  soit un fibré de fibre type  $K$ .

(La démonstration est laissée au lecteur).

*Remarque 1.* La compacité de  $K$  n'est pas nécessaire pour obtenir cette proposition mais elle garantit le fait que la variété  $B$ , construite à partir de l'hypothèse 1, ait une topologie séparée. Si  $K$  n'est pas compacte, il suffit de supposer de plus dans la condition 2 que les  $\varphi_i^{-1}(\{x_i^1\} \times K)$  sont des parties fermées dans  $\mathcal{D}$  (elles le sont dans  $\mathcal{V}_i$ ) pour que la topologie de  $B$  soit séparée.

Cette proposition montre que ce qui va suivre pourrait être présenté dans le langage des « fibrés », mais je pense que ce choix ne serait pas très naturel dans la mesure où les « bases » des fibrés n'interviendraient pas (ces dernières n'auraient d'intérêt que dans des cas très particuliers).

La présentation choisie, en termes d'« atlas d'observation » permet de généraliser très simplement les définitions précédentes de la manière suivante. On suppose que la variété  $K = K_1 \times K_2$  où  $K_1$  et  $K_2$  sont compactes (le lecteur adaptera ce qui va suivre au cas où  $K = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_l$ ).

**Définition 3.** *Un  $K_1$ -atlas d'observation sur  $\mathcal{D}$  est une famille de cartes  $(\mathcal{V}_i, \varphi_i)_{i \in I}$  sur  $\mathcal{D}$  à valeurs dans  $\Theta_i \times K_1 \times K_2$  qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

1.  $\bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i = \mathcal{D}$
2.  $\forall (i, j) \in I^2, \forall x \in \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j \quad \varphi_i^{-1}(\{x_i^1\} \times K_1 \times \{x_i^3\}) = \varphi_j^{-1}(\{x_j^1\} \times K_1 \times \{x_j^3\})$  où  $x_i^3$  est la composante de  $\varphi_i(x)$  sur  $K_2$ .

**Définition 4.** *Lorsque  $K_1$  est une variété orientée, on dira que le  $K_1$ -atlas d'observation **conserve l'orientation de  $K_1$**  si :  $\forall (i, j) \in I^2, \forall x \in \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j$ , l'orientation sur la sous-variété  $\varphi_i^{-1}(\{x_i^1\} \times K_1 \times \{x_i^3\})$  transportée de celle de  $K_1$  par  $\varphi_i$ , est la même que celle transportée par  $\varphi_j$ .*

Bien entendu, on écrit les mêmes définitions pour  $K_2$ .

**Définition 5.** *Un  $K_1$ - $K_2$ -atlas d'observation sur  $\mathcal{D}$  est à la fois un  $K_1$ -atlas d'observation et un  $K_2$ -atlas d'observation sur  $\mathcal{D}$ .*

**B.** On considère maintenant une variété pseudo-riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$  de dimension  $n$  et de classe  $C^k$ . Dans toute la suite de ce papier, les domaines  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{M}$  seront localement difféomorphes à  $\Theta \times K$  où  $\Theta$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^4$  et  $K = S^1 \times W$ ,  $S^1$  désigne le cercle standard orienté et  $W$  une variété compacte. On reprend donc les notations de la partie **A** précédente avec  $K_1 = S^1$  et  $K_2 = W$ .

Soit  $\mathcal{D}$  un domaine de  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{A}$  un  $S^1$ - $W$ -atlas d'observation sur  $\mathcal{D}$  qui conserve l'orientation de  $S^1$ . En chaque point  $x$  de  $\mathcal{D}$ , la sous-variété de dimension 1 notée  $S_x^1$  (difféomorphe à  $S^1$ ) est alors définie en posant :

$$S_x^1 = \varphi_i^{-1}(\{x_i^1\} \times S^1 \times \{x_i^3\})$$

où  $(\mathcal{V}_i, \varphi_i)$  est un difféomorphisme d'observation en  $x$  de l'atlas  $\mathcal{A}$  et en remarquant que  $S_x^1$  ne dépend pas du choix de ce difféomorphisme d'observation. La sous-variété  $S_x^1$  est, de plus, orientée sans ambiguïté.

On définit de même la sous-variété de dimension  $n - 5$  notée  $W_x$  (difféomorphe à  $W$ ) en posant :

$$W_x = \varphi_i^{-1}(\{x_i^1\} \times \{x_i^2\} \times W)$$

On remarquera que  $x' \in S_x^1 \Leftrightarrow S_{x'}^1 = S_x^1$  et  $x' \in W_x \Leftrightarrow W_{x'} = W_x$ .

L'espace tangent  $T_x(\mathcal{D})$  se décompose de manière unique sous la forme :

$$H_x \oplus (T_x(S_x^1) \oplus T_x(W_x))$$

où  $H_x$  désigne le sous-espace de dimension 4  $g$ -orthogonal à  $T_x(S_x^1) \oplus T_x(W_x)$  ( $T_x(S_x^1)$  n'est pas supposé  $g$ -orthogonal à  $T_x(W_x)$ ).

Dans la suite  $H_x$  sera appelé **l'espace vectoriel apparent** en  $x$  (relatif à l'atlas d'observation).

Le champ d'espaces  $H_x$  n'a aucune raison d'être intégrable, autrement dit, il n'y a aucune raison que par un point  $x_0$  de  $\mathcal{D}$ , passe une sous-variété de dimension 4 telle que les espaces tangents en tout point soient des  $H_x$ .

**Définition 6.** Un  $g$ -atlas d'observation sur  $\mathcal{D}$  est un  $S^1$ - $W$ -atlas d'observation sur  $\mathcal{D}$  qui conserve l'orientation de  $S^1$  et qui vérifie de plus les propriétés suivantes relatives au tenseur pseudo-riemannien  $g$  :

1.  $\forall x \in \mathcal{D}$  :
  - $g|_{H_x}$  est de signature  $(-, +, +, +)$
  - $g|_{T_x(S_x^1)}$  est de signature  $(-)$
  - $g|_{T_x(W_x)}$  est de signature  $(+, \dots, +)$
2.  $\forall (i, j) \in I^2, \forall x \in \mathcal{V}_i \cap \mathcal{V}_j$   $\varphi_i^*(\frac{\partial}{\partial t})_{\varphi_i(x)}$  et  $\varphi_j^*(\frac{\partial}{\partial t})_{\varphi_j(x)}$  sont de genre temps et dans la même orientation en temps (c'est à dire  $g(\varphi_i^*(\frac{\partial}{\partial t})_{\varphi_i(x)}, \varphi_j^*(\frac{\partial}{\partial t})_{\varphi_j(x)}) < 0$ ). Ici,  $(\frac{\partial}{\partial t})_{\varphi_i(x)}$  désigne le vecteur tangent en  $\varphi_i(x)$  associé au système de coordonnées standard  $(t, x, y, z)$  de  $\Theta_i \subset \mathbb{R}^4$  ( $\varphi_i : \mathcal{V}_i \rightarrow \Theta_i \times S^1 \times W$ ).

La condition 2 permet de définir une orientation en temps « classique » de chaque espace apparent  $H_x$  (qui varie différentiablement en  $x$ ).

Les définitions suivantes utilisent le processus classique qui introduit la notion d'atlas « complet » (ou « saturé »).

**Définition 7.** Deux  $g$ -atlas d'observation sur  $\mathcal{D}$  sont **équivalents** si leur réunion est encore un  $g$ -atlas d'observation.

**Définition 8.** Soit  $\mathcal{A}$  un  $g$ -atlas d'observation sur  $\mathcal{D}$ , le **complété** (ou le **saturé**) de  $\mathcal{A}$  est le  $g$ -atlas d'observation formé de la réunion de tous les  $g$ -atlas équivalents à  $\mathcal{A}$ .

**Définition 9.** Un  $g$ -atlas d'observation sur  $\mathcal{D}$  est **complet** (ou **saturé**) s'il est égal à son complété.

Les domaines typés que l'on va définir par la suite vont être des triplets  $(\mathcal{D}, g, \mathcal{A})$  où  $\mathcal{D}$  est un domaine de  $\mathcal{M}$ ,  $g$  un tenseur pseudo-riemannien sur  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{A}$  un  $g$ -atlas d'observation **complet** sur  $\mathcal{D}$ . Les « types » de ces domaines seront précisés par la donnée de **conditions géométriques** imposées sur  $(\mathcal{D}, g)$ . Le choix du  $g$ -atlas d'observation complet définira l'ensemble des « observateurs » que l'on s'autorise pour les mesures des grandeurs définies par le domaine typé (un « observateur » est mathématiquement défini par un difféomorphisme d'observation). Comme l'atlas sera complet, il laissera un grand choix de changements d'observateurs. Par exemple, si  $(\mathcal{V}, \varphi)$  est une carte de cet atlas complet  $\mathcal{A}$  et si  $\sigma_1 : \Theta \rightarrow \Theta' \subset \mathbb{R}^4$ ,  $\sigma_2 : S^1 \rightarrow S^1$ ,  $\sigma_3 : W \rightarrow W$  sont trois difféomorphismes, alors  $(\mathcal{V}, \sigma_1 \times \sigma_2 \times \sigma_3 \circ \varphi)$  est une carte de ce même atlas (sous réserve tout de même que les « orientations définies » soient conservées).

# Chapitre 1

## La physique non quantique

### 1.1 Les domaines de type « fluide » ou « potentiel »

Comme on vient de le préciser dans le « préliminaire mathématique », un domaine de type « fluide » ou « potentiel » est en premier lieu un triplet  $(\mathcal{D}, g, \mathcal{A})$  où  $\mathcal{D}$  est un domaine de  $\mathcal{M}$ ,  $g$  un tenseur pseudo-riemannien et  $\mathcal{A}$  un  $g$ -atlas d'observation complet sur  $\mathcal{D}$ . On rappelle qu'en chaque point  $x$  de  $\mathcal{D}$  l'espace tangent  $T_x(\mathcal{D})$  se décompose sous la forme  $H_x \oplus (T_x(S_x^1) \oplus T_x(W_x))$ . L'espace  $H_x$  (de dimension 4) est l'espace apparent au point  $x$ . La sous-variété  $S_x^1$  est diffeomorphe au cercle, orientée et de genre temps. La variété  $W_x$  (de dimension  $n - 5$ ) est compacte et de genre espace.

Sur  $\mathcal{D}$ , on définit le champ de vecteurs  $Y$  en prenant pour chaque  $x$  de  $\mathcal{D}$  l'unique vecteur tangent à  $S_x^1$ , dans l'orientation et tel que  $g_x(Y_x, Y_x) = -1$ . **Ce champ de vecteurs sera l'objet fondamental de l'électromagnétisme dans  $\mathcal{D}$ .**

### 1.2 Les domaines de type « fluide » définis à partir de la courbure d'Einstein

La condition géométrique naturelle imposée sur le domaine pour que celui-ci soit de type « fluide » sera une condition donnée sur le tenseur  $G := 2Ein_g$  qui va permettre de définir **canoniquement** un champ de vecteurs  $X_0$  sur  $\mathcal{D}$  de genre temps et tel que  $\forall x \in \mathcal{D}, X_{0x} \in H_x$ . Ce champ de vecteurs sera appelé le **champ de vecteurs apparent** du fluide et le flot associé le **flot apparent** du fluide.

Cette condition permettra aussi de définir canoniquement deux fonctions  $\mu$  et  $\rho : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  qui représenteront respectivement la **densité d'énergie** et la **densité de charge électrique** du fluide. La deuxième identité de Bianchi ( $\nabla_g \cdot G = 0$ ) permettra alors d'obtenir facilement les lois de conservation ainsi que les équations d'évolution habituelles, ceci pour une large classe de fluides. Cette condition géométrique est la première posée dans la définition 10. La deuxième condition pourra être interprétée comme le fait que l'on « néglige » les effets quantiques sur l'électromagnétisme (mais ceci n'apparaîtra clairement qu'à la lecture complète de ce papier). Le lemme suivant montre que cette deuxième condition n'est que l'« approximation » qui consiste à



moyenniser a priori la métrique pseudo-riemannienne  $g$  sur les cercles  $S_x^1$  définis précédemment et par là même « négliger » les variations de  $g$  sur ces cercles. Bien sûr, cette deuxième condition sera abandonnée dans le chapitre 2 car ce sont justement les « variations » de  $g$  sur les « petites variétés compactes » qui permettent de décrire les phénomènes quantiques.

**Lemme 1.** *On considère le champ de vecteurs  $Y$  tangent aux cercles  $S_x^1$  et normalisés par  $g(Y, Y) = -1$  défini précédemment. On note  $\sigma$  le groupe à 1 paramètre de difféomorphismes associé à  $Y$ . On définit la métrique pseudo-riemannienne « moyennisée »  $\bar{g}$  en posant :*

$$\forall x \in \mathcal{M}, \quad \bar{g}_x = \frac{1}{l_x} \int_{t_0}^{t_0+l_x} (\sigma^*(t)g)_x dt$$

où  $l_x$  est la « longueur » du cercle  $S_x^1$  relative à  $g$  ( $\bar{g}_x$  ne dépend pas du choix de  $t_0$  car  $\sigma_x(\cdot)$  est périodique de période  $l_x$ ).

Alors,  $\bar{g}(Y, Y) = -1$  et,  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma^*(s)\bar{g} = \bar{g}$ . Autrement dit,  $Y$  est un champ de Killing pour  $\bar{g}$ .

**Démonstration 1.** *Vérifier que  $\bar{g}(Y, Y) = -1$  est immédiat, le reste est résumé par les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned} (\sigma^*(s)\bar{g})_x &= \frac{1}{l_x} \int_{t_0}^{t_0+l_x} \sigma^*(s)(\sigma^*(t)g)_x dt \\ &= \frac{1}{l_x} \int_{t_0}^{t_0+l_x} (\sigma^*(t+s)g)_x dt \\ &= \frac{1}{l_x} \int_{t_0+s}^{t_0+s+l_x} (\sigma^*(t)g)_x dt \\ &= \bar{g}_x \end{aligned}$$

**Définition 10.** *Un domaine de type « fluide » est un triplet  $(\mathcal{D}, g, \mathcal{A})$  pour lequel les deux conditions suivantes sont réalisées :*

1.  $\forall x \in \mathcal{D}$   ${}^eG|_{H_x}$  admet un espace propre  $E_{-\mu}$  de dimension 1, de genre temps et de valeur propre  $-\mu < 0$  (de sorte que  $\mu > 0$ ). (Ici,  ${}^eG|_{H_x}$  est l'endomorphisme de  $H_x$  défini par :  $\forall X \in H_x$   ${}^eG|_{H_x}(X) = pr_{H_x} {}^eG(X)$ ).
2. Le champ de vecteurs  $Y$  est un champ de Killing, autrement dit, les difféomorphismes locaux engendrés par le champ  $Y$  sont des  $g$ -isométries (voir le lemme 1).

**Remarque 2.** Lorsque la condition 1 est vérifiée pour une métrique  $g$ , elle reste vérifiée pour toute métrique d'un « voisinage » de  $g$  et son seul objectif est, comme on l'a déjà précisé, de permettre de définir canoniquement le champ de vecteurs  $X_0$  et les deux fonctions  $\mu$  et  $\rho$ . Ceci est fondamentalement différent du principe axiomatique lagrangien car ce dernier est caractérisé par la donnée axiomatique précise « d'égalités » qui définissent le lagrangien. On rappelle que la condition 2 a pour seul objectif de « négliger » les « effets quantiques » liés à l'électromagnétisme.

### 1.2.1 Les objets physiques définis canoniquement dans un domaine de type « fluide »

1. **Le champ de vecteurs**  $Y$  (déjà présenté) défini  $\forall x \in \mathcal{D}$  comme l'unique vecteur tangent en  $x$  à  $S_x^1$ , dans l'orientation, et tel que  $g(Y_x, Y_x) = -1$ .
  - **La 1-forme associée**  $Y^\flat$  (où  $Y_i^\flat := g_{ij}Y^j$ ).
  - **La 2-forme différentielle** caractérisant l'électromagnétisme notée classiquement  $F$  est définie ici par  $F = d(Y^\flat)$ .
2. **Le champ de vecteurs**  $X_0$  (déjà présenté) défini  $\forall x \in \mathcal{D}$  comme l'unique vecteur  $X_{0,x}$  de l'espace propre  $E_{-\mu} \subset H_x$ , dans l'orientation, et tel que  $g(X_{0,x}, X_{0,x}) = -1$  (on remarque que, compte tenu de la signature de  $g|_{H_x}$ , cet espace propre de genre temps est unique (cf. annexe 3.1)). Le champ de vecteurs  $X_0$  sera appelé **le champ de vecteurs apparent** du fluide et le flot associé, **le flot apparent du fluide**.
3. **La fonction**  $\mu : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^+$  définie  $\forall x \in \mathcal{D}$  par  $\mu(x) = \mu_x$  où  $-\mu_x$  est la valeur propre associée à l'espace propre  $E_{-\mu_x}$ . Cette fonction est la **fonction densité d'énergie** du fluide.
4. **La fonction**  $\rho : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  définie  $\forall x \in \mathcal{D}$  par  $\rho(x) = G_x(X_{0,x})$ . Cette fonction est la **fonction densité de charge électrique** du fluide.
5. **Le champ de vecteurs**  $X := X_0 + \frac{\rho}{\mu}Y$ , de genre temps, est le **champ de vecteurs du fluide** ( $X_0$  n'était que le champ apparent du fluide) et le flot associé, **le flot du fluide**. (Évidemment,  $X = X_0$  si la densité de charge  $\rho$  est nulle).
6. Quel que soit  $x \in \mathcal{D}$ , **l'espace temporel**  $\mathcal{T}_x$ , de dimension 2, est le sous-espace vectoriel de  $T_x(\mathcal{D})$  engendré par  $X_{0,x}$  et  $Y_x$ . Le champ de plans  $\mathcal{T}$  est intégrable puisque la condition 2 imposée sur les domaines de type « fluide » a pour conséquence le fait que  $[X_0, Y] = 0$  (cf. annexe 3.1). On définit donc le **tube temporel**  $\tau_x$  comme la sous-variété intégrale passant par  $x$  de ce champ de plans. Le tube temporel  $\tau_x$  est une sous-variété de dimension 2 **totale de genre temps** au sens où tous ses vecteurs tangents sont de genre temps. Ces « tubes » peuvent être interprétés comme la généralisation des lignes de flot du fluide. Ils sont orientés par « l'orientation » donnée pour  $X_0$  et  $Y$ .
7. Compte tenu des définitions précédentes,  $\forall x \in \mathcal{D}$ , le tenseur  $G_x$  « restreint » à  $\mathcal{T}_x$  s'écrit :  $G|_{\mathcal{T}_x} = \mu(x)X^\flat \otimes X^\flat + \sigma(x)Y^\flat \otimes Y^\flat$  où  $\sigma : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière. Le champ de formes bilinéaires  $P = G - G|_{\mathcal{T}_x}$  sera appelé **la pression du fluide** (elle vérifie en particulier :  $P(X_0, X_0) = P(X_0, Y) = P(Y, Y) = P(X, X) = 0$ ). Le champ de tenseurs  $G$  s'écrit donc sous la forme :

$$\begin{aligned} G &= \mu X^\flat \otimes X^\flat + \sigma Y^\flat \otimes Y^\flat + P \\ &= \mu X_0^\flat \otimes X_0^\flat + \rho(X_0^\flat \otimes Y^\flat + Y^\flat \otimes X_0^\flat) + \left(\sigma + \frac{\rho^2}{\mu}\right)Y^\flat \otimes Y^\flat + P \end{aligned}$$

**La pression apparente**  $P_{Ax}$  est la pression  $P$  restreinte à l'espace apparent  $H_x$ , autrement dit, par définition :  $\forall (Z, Z') \in H_x^2$   $P_{Ax}(Z, Z') = P_x(Z, Z')$ ,  $\forall Z \in T_x(\mathcal{D})$   $\forall Z' \in T_x(S_x^1) \oplus T_x(W_x)$   $P_{Ax}(Z, Z') = 0$  et  $P_{Ax}(Z, X_0) = 0$ .

**La pression cachée** est définie par  $P_{Cx} := P_x - P_{Ax}$ . Le champ de tenseurs  $G$  s'écrit donc aussi sous la forme :  $G = \mu X^\flat \otimes X^\flat + \sigma Y^\flat \otimes Y^\flat + P_A + P_C$ .

Les objets que l'on vient de définir ne l'ont été qu'à partir de la géométrie du type choisi, c'est à dire du seul tenseur pseudo-riemannien  $g$  sur  $\mathcal{D}$ . Ils ne sont pas indépendants entre eux. Les liens de dépendance sont donnés par les seules propriétés mathématiques des variétés pseudo-riemanniennes (en particulier la deuxième identité de Bianchi). Comme on va le vérifier, ces liens de dépendance ne sont autres que les « lois de la physique » sur les fluides qui redonnent en particulier celles de la relativité générale standard. Ici, aucune loi, aucun principe n'est ajouté. Les équations que l'on va écrire sont des conclusions obligées des définitions que l'on vient de donner.

### 1.2.2 Les équations générales sur les fluides

**Théorème 1.** Dans un domaine de type « fluide », les égalités suivantes sont vérifiées :

1. (générique de la conservation de l'énergie)

$$\nabla_g \cdot (\mu X) = \nabla_g \cdot (\mu X_0) = g(X_0, \nabla_g \cdot P)$$

soit, en coordonnées :

$$\nabla_i (\mu X^i) = \nabla_i (\mu X_0^i) = X_{0j} \nabla_i P^{ij}$$

de plus :

$$\mu^2 X \left( \frac{\rho}{\mu} \right) = \mu g(Y, \nabla_g \cdot P) - \rho g(X_0, \nabla_g \cdot P)$$

et :

$$g(Y, \nabla_g \cdot P) = \nabla_g \cdot {}^e P(Y)$$

2. (générique de la conservation de la charge électrique)

$$\nabla_g \cdot (\rho X) = \nabla_g \cdot (\rho X_0) = \nabla_g \cdot ({}^e P(Y)) = g(Y, \nabla_g \cdot P)$$

soit, en coordonnées :

$$\nabla_i (\rho X^i) = \nabla_i (\rho X_0^i) = Y_j \nabla_i P^{ij}$$

(Remarque :  ${}^e P(Y) = {}^e P_C(Y)$ ).

3. (équations de mouvement)

(a)

$$\mu D_x X = -\nabla_g \cdot P - g(X_0, \nabla_g \cdot P) X$$

soit, en coordonnées :

$$\mu X^i \nabla_i X^j = -\nabla_i P^{ij} - X_{0j} \nabla_i P^{ij} X^j$$

(b)

$$\mu D_{X_0} X_0 = \rho^e F(X_0) - pr_{\mathcal{T}^\perp}(\nabla_g \cdot P)$$

4. (générique de la deuxième équation de Maxwell, la première est évidente puisque  $F := d(Y^\flat)$ )

$$\nabla_g \cdot F = \rho X_0 + \frac{1}{2}(F_{ij}F^{ij})Y - {}^e P(Y)$$

soit en coordonnées :

$$\nabla_i F^{ij} = \rho X_0^j + \frac{1}{2}(F_{kl}F^{kl})Y^j - P^{ij}Y_i$$

La démonstration de ce théorème s'obtient rapidement en utilisant les propriétés standard des variétés pseudo-riemanniennes (en particulier la deuxième identité de Bianchi) et est donnée dans l'annexe 3.1.

Les équations données par le théorème 1 généralisent les équations obtenues en relativité générale standard sur les fluides. Elles ne sont pas « suffisamment déterministes » (trop d'inconnues par rapport au nombre d'équations) et ne sont utiles sous cette forme que pour l'étude de comportements globaux sur les fluides. Pour être utilisées de manière plus précise, il est nécessaire d'imposer des conditions supplémentaires à la géométrie du type de fluide donnée. Ceci doit, bien sûr, être considéré comme des choix « d'approximation » différents suivant les cas considérés (voir l'annexe 3.11 sur les « approximations »).

### 1.2.3 Les fluides particuliers

Les conditions géométriques particulières que l'on va poser maintenant ont pour but de retrouver la forme exacte des équations connues sur les fluides en relativité générale standard évidemment écrites en dimension 4. Comme, pour nous, les équations sont écrites en dimension  $n$ , c'est en « projection » sur les espaces apparents  $H_x$  que la comparaison devra être faite. En fait, l'objectif est plutôt de montrer que les fluides considérés en relativité générale standard sont des cas particuliers de ceux que l'on vient de définir et on verra plus loin que des exemples de « fluides » et de « potentiels » spécifiques à la dimension  $n > 4$  sont particulièrement intéressants.

#### Définition 11.

1. Un domaine de type « **fluide parfait** » est un domaine de type « fluide » pour lequel  ${}^e P(Y) = 0$  (en fait,  ${}^e P(Y) = {}^e P_c(Y)$  où  $P_c$  est la pression cachée (defs. 1.4.1))
2. Un domaine de type « **fluide parfait isentropique** » est un domaine de type « fluide parfait » pour lequel, en chaque point  $x$  de  $\mathcal{D}$ , le tenseur de pression  $P_x$  est proportionnel au tenseur  $(g_x - g_x|_{\mathcal{T}_x})$  (aucune direction « d'espace » n'est privilégiée), autrement dit :  $P = \tilde{p}(g + X_0^\flat \otimes X_0^\flat + Y^\flat \otimes Y^\flat)$  où  $\tilde{p} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  sera appelée **la fonction pression**.
3. Un domaine de type **fluide vraiment-parfait** » (ou de type « poussière »), éventuellement chargé électriquement, est un domaine de type « fluide parfait » pour lequel  $\nabla_g \cdot P = 0$ . Lorsque l'on considère un domaine de type « **fluide vraiment-parfait sans électromagnétisme** » on suppose de plus que  $\rho = 0$  et  $F = 0$ .

*Remarque 3.* Dans les définitions que l'on vient de donner, les hypothèses de nullité des tenseurs  ${}^eP(Y)$  et  $\nabla_g \cdot P$  peuvent être remplacés par le fait que ces tenseurs sont « négligeables » par rapport à ceux qui interviennent dans les équations qui vont suivre, en précisant, bien sûr, la notion de « négligeabilité ».

La proposition qui suit ne fait que transposer le théorème précédent aux cas particuliers de fluides que l'on vient de définir.

**Proposition 2.**

1. Dans un domaine de type « fluide parfait » les égalités suivantes sont vérifiées :

(a) (générique de la conservation de l'énergie)

$$\nabla_g \cdot (\mu X) = \nabla_g \cdot (\mu X_0) = g(X_0, \nabla_g \cdot P)$$

soit, en coordonnées :

$$\nabla_i (\mu X^i) = \nabla_i (\mu X_0^i) = X_{0j} \nabla_i P^{ij}$$

de plus :

$$\mu^2 X \left( \frac{\rho}{\mu} \right) = \mu^2 X_0 \left( \frac{\rho}{\mu} \right) = -\rho g(X_0, \nabla_g \cdot P)$$

(b) (conservation de la charge électrique)

$$\nabla_g \cdot (\rho X) = \nabla_g \cdot (\rho X_0) = 0$$

soit, en coordonnées :

$$\nabla_i (\rho X^i) = \nabla_i (\rho X_0^i) = 0$$

(c) (équation de mouvement)

$$\mu D_x X = -\nabla_g \cdot P - g(X_0, \nabla_g \cdot P)X$$

soit, en coordonnées :

$$\mu X^i \nabla_i X^j = -\nabla_i P^{ij} - X_{0j} \nabla_i P^{ij} X^j$$

.

qui s'écrit aussi sous la forme :

$$\mu D_{X_0} X_0 = \rho^2 F(X_0) - \nabla_g \cdot P - g(X_0, \nabla_g \cdot P)X_0$$

(d) (générique de la deuxième équation de Maxwell)

$$\nabla_g \cdot F = \rho X_0 + \frac{1}{2} (F_{ij} F^{ij}) Y$$

soit en coordonnées :

$$\nabla_i F^{ij} = \rho X_0^j + \frac{1}{2} (F_{kl} F^{kl}) Y^j$$

(en particulier :  $\forall x \in \mathcal{D} \quad pr_{H_x}(\nabla_g \cdot F) = \rho X_{0_x}$ )

(Ces propriétés sont des conséquences immédiates du théorème 1).

2. Dans un domaine de type « fluide parfait isentropique » les égalités suivantes sont vérifiées :

- (a) (générique de la conservation de l'énergie)

$$\nabla_g \cdot (\mu X_0) + \tilde{p} \nabla_g \cdot X_0 = 0$$

de plus :

$$\mu^2 X \left( \frac{\rho}{\mu} \right) = \mu^2 X_0 \left( \frac{\rho}{\mu} \right) = \rho \tilde{p} \nabla_g \cdot X_0$$

- (b) (conservation de la charge électrique)

$$\nabla_g \cdot (\rho X) = \nabla_g \cdot (\rho X_0) = 0$$

- (c) (équation de mouvement)

$$(\mu + \tilde{p}) D_{X_0} X_0 = \rho^e F(X_0) - \nabla_g \tilde{p} - X_0(\tilde{p}) X_0$$

On retrouve ici exactement les équations obtenues en relativité générale standard pour les fluides chargés isentropiques (on peut voir par exemple [8]).

(La démonstration de ces propriétés s'obtient rapidement après avoir vérifié que  $\nabla_g \cdot P = \nabla_g \tilde{p} + X_0(\tilde{p}) X_0 + \tilde{p}(\nabla_g \cdot X_0) X_0 + \tilde{p} D_{X_0} X_0$  puis  $g(X_0, \nabla_g \cdot P) = -\tilde{p} \nabla_g \cdot X_0$ )

3. Dans un domaine de type « fluide vraiment-parfait » les égalités suivantes sont vérifiées :

- (a) (conservation de l'énergie)

$$\nabla_g \cdot (\mu X) = \nabla_g \cdot (\mu X_0) = 0$$

de plus :

$$X \left( \frac{\rho}{\mu} \right) = X_0 \left( \frac{\rho}{\mu} \right) = 0$$

- (b) (conservation de la charge électrique)

$$\nabla_g \cdot (\rho X) = \nabla_g \cdot (\rho X_0) = 0$$

- (c) (équation de mouvement)

$$D_X X = 0$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\mu D_{X_0} X_0 = \rho^e F(X_0)$$

Dans ce cas  $X$  est un champ géodésique, que le fluide soit chargé électriquement ou non. (Bien entendu, si la densité de charge électrique  $\rho$  est nulle  $X = X_0$  est aussi un champ géodésique).

*Remarque 4.* Dans « l'équation de mouvement » que l'on vient de donner,  $(D_{X_0}X_0)_x$  et  ${}^eF(X_0)_x$  sont g-orthogonaux à  $Y_x$  mais pas nécessairement à  $W_x$ . Si l'on veut garantir le fait que  $(D_{X_0}X_0)_x$  et  ${}^eF(X_0)_x$  appartiennent à l'espace apparent  $H_x$  on peut poser la condition supplémentaire (\*) suivante :

(\*) les sous-variétés  $W_x$  sont parallèles le long des cercles géodésiques  $S_x^1$ . Précisément :  $\forall x \in \mathcal{D} \quad \forall z \in T_x(W_x) \quad \forall x' \in S_x^1$ , le transporté parallèle de  $Z$  en  $x'$  le long du cercle géodésique  $S_x^1$  est tangent à  $W_{x'}$ .

On vérifie alors rapidement que, sous cette condition :

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad {}^eF(X_0)_x \in H_x.$$

Cette condition (\*) sera vérifiée dans les exemples que l'on présentera ensuite.

### 1.3 Les domaines de type « potentiel » définis à partir de la courbure d'Einstein

**Définition 12.** Un domaine de « type potentiel » est un triplet  $(\mathcal{D}, g, \mathcal{A})$  qui vérifie les propriétés suivantes :

1.  $\forall x \in \mathcal{D} \quad G_x|_{H_x} = 0$  et  $pr_{H_x} {}^eG(Y) = 0$
2. Le champ  $Y$  est un champ de Killing. (Voir le lemme 1 et sa présentation).

Ces domaines de type « potentiel » apparaissent donc comme des domaines de type « fluide » pour lesquels la densité d'énergie, la densité de charge électrique ainsi que la pression apparente  $P_A$  sont nulles. On remarquera d'autre part qu'il n'y a plus de champs de vecteurs canoniquement définis comme l'étaient  $X_0$  et  $X$  pour les fluides. Seuls subsistent, comme objets canoniques, ceux qui définissent l'électromagnétisme, c'est à dire le champ  $Y$  et la 2-forme  $F$ . Le tenseur  $G$  s'assimile alors à la pression cachée  $P_c$  qui vérifie donc  $\nabla \cdot P_c = 0$ .

Le théorème 2 suivant s'obtient immédiatement en utilisant la démonstration de la partie 4 du théorème 1 sur les équations de Maxwell.

**Théorème 2.** Dans un domaine de type potentiel donné par la définition 12 l'égalité suivante est vérifiée :

(Seconde équation de Maxwell, la première est évidente puisque  $F := dY^b$ )

$$\nabla_g \cdot F = \frac{1}{2}(F_{ij}F^{ij})Y - {}^eG(Y)$$

En particulier (puisque  $pr_{H_x} {}^eG(Y) = 0$ ) :

$$pr_{H_x} \nabla_g \cdot F = 0$$

Les domaines de type « potentiel » sont en pratique très importants car la connaissance de leurs géodésiques donne, en approximation, les courbes des « objets élémentaires » (chargés électriquement ou non) « placés » dans ces potentiels lorsque l'on considère que l'incidence de ces objets est négligeable sur la géométrie du type « potentiel ». En effet, si l'on introduit un objet élémentaire dans un domaine de type « potentiel », celui ci peut alors être considéré comme un

domaine de type « fluide vraiment-parfait » dans la partie où la densité d'énergie n'est pas nulle, celle-ci étant de plus très « localisée en espace ». Si l'on considère qu'en dehors de ce domaine très localisé, la géométrie du domaine de type « potentiel » n'est pas modifiée, alors le champ  $X$  du fluide (défini lorsque  $\mu \neq 0$ ) est un champ géodésique d'après la proposition 2 (2.3.c). Les courbes du flot du fluide déterminé par  $X$ , qui donnent la trajectoire de l'objet élémentaire, sont donc (en approximation) des géodésiques de type « potentiel ». De plus le quotient  $\frac{\rho}{\mu}$  s'assimile au quotient de la charge électrique par la masse de l'objet élémentaire considéré puisque celui-ci est « restreint en espace ». Ce principe est classique en relativité générale standard pour les objets élémentaires **non chargés électriquement** et est utilisé, par exemple, pour déterminer la trajectoire des planètes dans un domaine de Schwarzschild, la déviation de la lumière, etc. Ce qui est remarquable c'est que ce principe s'applique aussi maintenant pour les objets élémentaires **chargés électriquement**, mais nécessairement dans un espace de dimension  $n \geq 5$ . Dans ce cas la trajectoire apparente est déterminée par le champ « apparent »  $X_0$  (non géodésique), lui même déduit du champ géodésique  $X$ . Bien sûr,  $X = X_0$  lorsque la charge électrique est nulle.

Des exemples précis de calculs seront présentés à la fin de la section suivante.

*Remarque 5.* Lorsqu'un domaine  $(\mathcal{D}, g)$  est isométrique à un domaine de la forme  $(\mathcal{D}' \times V, g' \times g_V)$  où  $V$  est une variété compacte de dimension  $k$  et  $g' \times g_V$  est une métrique produit, on peut définir sur le couple  $(\mathcal{D}', g')$  (pour lequel  $\dim \mathcal{D}' = n - k$ ) les notions de « type fluide » ou de « type potentiel » d'une manière identique à ce qui a été fait sur  $(\mathcal{D}, g)$ . Si les « objets » définis à partir de la courbure de Ricci donnent des notions très proches que ce soit sur  $(\mathcal{D}, g)$  ou  $(\mathcal{D}', g')$  puisque  $g' \times g_V$  est une métrique produit, il n'en est plus de même pour celles définies à partir du tenseur d'Einstein (ou de  $G$ ) car la courbure scalaire de  $g_V$  intervient de manière importante et  $S_g$  est différente de  $S_{g'}$  lorsque  $S_{g_V}$  n'est pas nulle ( $S_g = S_{g'} + S_{g_V}$ ). Or, c'est essentiellement à partir du tenseur d'Einstein que nous avons défini les notions importantes. Il se peut par exemple que  $(\mathcal{D}', g')$ , de dimension  $n - k$ , soit de type fluide alors que  $(\mathcal{D}, g)$  ne le soit pas, ou bien que  $(\mathcal{D}', g')$  soit de type fluide sans pression et que  $(\mathcal{D}, g)$  soit de type fluide avec pression (ou réciproquement), etc. De plus, les objets définis sur les « fluides » sont différents considérés sur  $(\mathcal{D}, g)$  ou sur  $(\mathcal{D}', g')$ . Il peut donc être avantageux, dans le cas très particulier pour lequel  $(\mathcal{D}, g)$  est isométrique à  $(\mathcal{D}' \times V, g' \times g_V)$ , d'utiliser les « fluides » ou les « potentiels » définis sur  $(\mathcal{D}', g')$  plutôt que sur  $(\mathcal{D}, g)$ . Il faudra, bien sûr, dans ce cas préciser qu'il s'agit des fluides ou des potentiels définis sur  $(\mathcal{D}', g')$  dont les caractéristiques sont éventuellement différentes de celles données par  $(\mathcal{D}, g)$ . Bien entendu, les théorèmes obtenus précédemment s'appliquent à  $(\mathcal{D}', g')$  de dimension  $n - k$  aussi bien qu'à  $(\mathcal{D}, g)$  de dimension  $n$ .

## 1.4 Exemples de domaines de type potentiel et de type « fluide » donnés par le tenseur pseudo-riemannien $g$ lui même

Les égalités données par le théorème 1 sur les fluides sont écrites à l'aide du tenseur pseudo-riemannien  $g$ . Deux égalités qui ont la même écriture peuvent décrire des fluides dont le comportement est très différent si les tenseurs pseudo-riemanniens sous-jacents sont différents. En fait, le théorème 1, écrit sans précisions sur le tenseur  $g$ , ne peut s'appliquer qu'à des études « globales » sur les fluides. Lorsque l'on souhaite décrire des comportements précis, il est im-



portant de savoir définir des domaines de type « fluide » ou de type « potentiel » à partir du tenseur pseudo-riemannien  $g$ . Ce processus est, bien sûr, utilisé en relativité générale standard et les domaines considérés sont souvent présentés sous la dénomination de « solutions exactes de l'équation d'Einstein ». On peut citer : les solutions de Schwarzschild-Kruskal, de Reissner-Nordström, de Kerr, de Lemaître, etc. Dans tous les cas,  $g$  est donné explicitement.

Tous les exemples de domaines de type « fluide » ou de type « potentiel » donnés en dimension 4 ou en dimension 5, introduits dans [4] ou [5] peuvent être immédiatement traduits dans le cadre que nous présentons ici en dimension  $n$ . Il suffit pour cela de définir les domaines de dimension  $n$  qui sont localement isométriques à  $(\Omega \times K, g \times g_K)$  où  $(\Omega, g)$  est le domaine considéré en dimension 4 ou 5 et  $(K, g_K)$  est une variété riemannienne compacte. La variété compacte  $K$  est de la forme  $K = S^1 \times W$  et la métrique  $g_K$  a pour signature  $(-, +, +, \dots, +)$  si la dimension de  $\Omega$  est 4.

Évidemment ces constructions n'ont mathématiquement pas d'intérêt, elles consistent uniquement à tout ramener en dimension  $n$  sans modifier les propriétés géométriques locales.

Les exemples que l'on va présenter maintenant sont tout à fait nouveaux et n'ont de sens que lorsque  $n > 5$  et la signature de la métrique  $g$  est de la forme  $(-, +, +, +, -, +, \dots, +)$ . Ils donneront en particulier, avec une grande simplicité, une très bonne approximation des domaines de la physique classique qui ne contiennent que des potentiels électromagnétiques et newtoniens. Ce sont ces domaines que l'on réutilisera plus loin dans l'étude des phénomènes quantiques.

Avant de présenter les exemples de domaines de type « potentiel » on commence par préciser quelques notations et donner quelques définitions. Celles-ci seront utilisées tout au long de ce papier.

### 1.4.1 Quelques notations et définitions

1. Le cercle  $S^1(\delta)$  de rayon  $\delta$  est défini en posant  $S^1(\delta) = \mathbb{R}/2\pi\delta\mathbb{Z}$ ,  
ce qui, en utilisant la surjection  $\Pi : \mathbb{R} \rightarrow 2\pi\delta\mathbb{Z}$ , donne canoniquement :  
**une origine**  $P$  sur  $S^1(\delta)$  ( $P := \Pi(0)$ ),  
**une orientation** (celle de  $\mathbb{R}$  transportée par  $\Pi$ ),  
**une coordonnée**  $u \in ]0, 2\pi\delta[$  pour  $\Pi(u) \in S^1(\delta) - \{P\}$ ,  
**une métrique**  $g_{S^1(\delta)}$  (celle de  $\mathbb{R}$  quotientée par  $\Pi$ ).
2. Soit  $\Theta$  un ouvert de  $\mathbb{R}^4$  et  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  où  $W$  est une variété compacte (qui sera ensuite souvent décomposée sous la forme  $S^3(\rho) \times V$  et  $(S^3(\rho), g_{S^3(\rho)})$  sera la sphère riemannienne standard de dimension 3)  
 $\mathcal{C}$  sera appelée **une cellule type**.
3. **Un système de coordonnées standard sur  $\mathcal{C}$**  sera noté :  $(t, x^1, x^2, x^3, u, w)$   
où  $(t, x^1, x^2, x^3) \in \Theta \subset \mathbb{R}^4$ ,  $u \in S^1(\delta)$  et  $w = (w^1, \dots, w^k)$  sont les coordonnées déterminées par le choix d'une carte sur  $W$ . Le couple  $(t, u)$  des coordonnées du temps « double » sera parfois noté  $(x^0, x^4)$ .  
Les éléments de  $S^1(\delta)$  seront notés «  $u$  » (de coordonnée standard «  $u$  »). Les éléments de  $W$  seront notés «  $w$  » (de coordonnées standard «  $(w^1, \dots, w^k)$  »).

4. **Une métrique de référence** sur la cellule  $\mathcal{C}$  (qui deviendra ensuite une métrique de potentiel neutre) est une métrique pseudo-riemannienne  $g_0$  qui s'écrit sous la forme :

$$g_0 = g_\Theta \times (-g_{S^1(\delta)}) \times g_W$$

où  $g_\Theta$  est la métrique de Minkovski sur  $\Theta \subset \mathbb{R}^4$ ,  $g_{S^1(\delta)}$  la métrique riemannienne standard sur  $S^1(\delta)$  et  $g_W$  une métrique riemannienne sur  $W$ .

La métrique  $g_0$  s'écrit, dans un système de coordonnées standard :

$$g_0 = -dt^2 + \sum_{k=1}^3 (dx^k)^2 - du^2 + \sum g_{Wij} dw^i dw^j$$

Elle correspond aux choix des « unités géométriques » puisque les coefficients de «  $dt^2$  » et «  $du^2$  » sont  $(-1)$  et ceux de  $(dx^k)^2$  sont  $(+1)$ .

*Remarque 6.* Comme « variété » la cellule type aurait pu être définie plus simplement en prenant  $S^1(1)$  au lieu de  $S^1(\delta)$  puisque à difféomorphisme près, les rayons n'ont pas d'importance. Mais alors, une « métrique standard »  $g_0$  aurait dû être définie en posant  $g_0 = -dt^2 + \sum_{k=1}^3 (dx^k)^2 - \delta^2 du^2 + \sum g_{Wij} dw^i dw^j$  pour obtenir un résultat identique. Dans ce cas, les unités de « temps » sur  $\mathbb{R}$  et sur  $S^1(1)$  auraient été différentes. Le choix précisé dans ce paragraphe m'a paru préférable.

#### 1.4.2 Les métriques représentant les potentiels

On considère une carte  $(\mathcal{V}, \zeta)$  de l'atlas d'observation pour laquelle la cellule type  $\mathcal{C}$  est de la forme  $\Theta \times S^1 \times W$ .

**Les métriques représentant les potentiels seront définies, pour simplifier, sur  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1 \times W$ , autrement dit on notera  $g$  la métrique transportée par  $\zeta$  de celle définie sur  $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ .**

##### A- les métriques représentant les potentiels neutres

**Définition 13.** Une métrique pseudo-riemannienne  $g_0$  définie sur une cellule type  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1 \times W$  **représente un potentiel neutre** si elle s'écrit sous la forme d'une métrique produit :

$$g_0 = g_\Theta \times (-g_{S^1(\delta)}) \times g_W$$

où :  $g_\Theta$  est la métrique de Minkovski habituelle sur  $\Theta \subset \mathbb{R}^4$ .

$g_{S^1(\delta)}$  est la métrique standard du cercle  $S^1$  de rayon  $\delta$ .

$g_W$  est une métrique riemannienne sur la variété compacte  $W$  telle que la courbure scalaire  $S_{g_W}$  soit constante, ( $S_{g_0}$  est alors égale à cette même constante).

Les différents potentiels « neutres » sont donc, pour le moment, liés aux différents choix possibles des variétés riemanniennes compactes  $(W, g_W)$  à courbure scalaire constante ainsi qu'aux rayons  $\delta$  du cercle  $S^1$ .

La signature de  $g_0$  est en tout point :  $(-, +, +, +, -, \dots, +)$ . Le choix de la métrique de Minkovski  $g_\Theta$  sur  $\Theta$  est dû au fait que l'on ne cherche, pour le moment, qu'à retrouver les résultats standard des théories quantiques (présentés dans le chapitre 2).

Comme on le verra, la métrique  $g_0$  sera considérée, lors de la description d'expériences précises, comme la métrique de l'observateur qui fait les mesures. Un choix de  $g_0$  différent serait possible, pour caractériser par exemple une « déformation » de l'espace-temps dans lequel l'observateur fait les mesures, mais ceci compliquerait évidemment fortement les calculs.

*Remarque 7.* Le choix de  $g_\Theta$  comme métrique de Minkovski permet d'avoir la propriété suivante :

Si  $\Lambda : \mathbb{R}^4 \supset \Theta \rightarrow \Theta' \subset \mathbb{R}^4$  est une transformation de Lorentz standard, alors :  $\sigma^* g_0 = g_0$  lorsque  $\sigma := \Lambda \times I_{S^1 \times W}$  où  $I_{S^1 \times W}$  est l'application « identité » de  $S^1 \times W$ . Autrement dit, la notion de « potentiel neutre » est invariante par changement d'observateurs qui correspondent aux changements de cartes associés aux transformations de Lorentz.

## B- Les métriques représentant les potentiels « actifs »

Si l'on se donne un potentiel neutre  $g_0$  sur une cellule type  $\mathcal{C}$ , toute autre métrique  $g$  sur  $\mathcal{C}$  s'écrit évidemment sous la forme  $g = g_0 + h$  où  $h$  est un champ de formes bilinéaires symétriques. Le champ  $h$  peut être considéré comme un champ d'endomorphismes sur  $\mathcal{C}$ , relativement à  $g_0$ , noté  ${}^e h$ , (en coordonnées,  ${}^e h_j^i = g_0^{ik} h_{kj}$ ).

**Le fait remarquable est que les métriques qui vont représenter les potentiels vont être caractérisés essentiellement par la propriété disant que  ${}^e h$  est un champ d'endomorphismes NILPOTENTS (cf. def. 14).**

Il est clair que  ${}^e h$  est un champ d'endomorphismes symétriques relativement à  $g_0$  (cf. annexe 3.2). Si la signature de  $g_0$  était de la forme  $(+, +, \dots, +)$ , les endomorphismes  ${}^e h$  seraient diagonalisables en tout point  $x$  de  $\mathcal{C}$  et ne pourraient donc être nilpotents qu'en étant identiquement nuls. Ceci n'est plus le cas si la signature de  $g$  contient des signes  $(-)$  et des signes  $(+)$ .

L'étude qui va suivre va en fait montrer que **le signe  $(-)$  placé en première position** dans la signature de  $g_0$  (qui correspond à celui de la métrique de Minkovski standard) permet l'existence de champs d'endomorphismes **nilpotents  ${}^e h$  non nuls** dont les métriques correspondantes  $g = g_0 + h$  seront en particulier celles qui donneront les **potentiels newtoniens**.

**Le signe  $(-)$  placé en cinquième position** (qui correspond au cercle  $S^1(\delta)$ ) permet l'existence d'autres champs d'endomorphismes **nilpotents non nuls** dont les métriques correspondantes seront en particulier celles qui donneront les **potentiels électromagnétiques**.

*Remarque 8.* La propriété de nilpotence de  ${}^e h$  dans la décomposition de  $g$  sous la forme  $g_0 + h$  est une propriété importante qui permettra d'exhiber des domaines intéressants de types autres que « potentiels » comme, par exemple, celui présenté dans la section 1.8.

Nous verrons qu'aux potentiels newtoniens (et même à des potentiels un peu plus généraux) sont attachés, de par leurs définitions mêmes, naturellement deux objets :

-Une fonction  $v : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  appelée la « fonction potentiel », et un champ de vecteurs de genre lumière  $X_1$  (cf proposition 3).

De même, à un potentiel électromagnétique seront attachés naturellement deux objets :

-Un champ de vecteurs  $Y$  appelé le « champ de vecteurs potentiel électromagnétique » (et on va retrouver là le potentiel déjà défini à partir du champ de vecteurs  $Y$ ), et un champ de vecteurs de genre lumière  $X_2$  (cf proposition 4).

Dans les deux cas, ces deux objets caractériseront complètement  $h$ .

Les potentiels seront qualifiés « **d'actifs** » si  $h \neq 0$ . On pourra remarquer que, pour une métrique  $g_0$  représentant un potentiel neutre, les composantes sur  $\Theta$  des images des géodésiques sont des droites. Ce ne sera plus le cas pour les potentiels actifs que l'on va présenter, ceci après avoir précisé toutes ces notions et donné quelques propriétés générales.

**Définition 14.** *Un champ d'endomorphismes  ${}^e h$  est **nilpotent d'indice**  $p \in \mathbb{N}$  si, quel que soit  $x \in \mathcal{C}$ , quel que soit  $q \geq p$ , l'endomorphisme  ${}^e h$  de  $T_x(\mathcal{C})$  vérifie  $({}^e h_x)^q = 0$  et s'il existe  $x \in \mathcal{C}$  tel que  $({}^e h_x)^{p-1} \neq 0$*

**Définition 15.** *Une métrique pseudo-riemannienne  $g$  définie sur une cellule type  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  **représente un potentiel actif** si elle s'écrit sous la forme  $g = g_0 + h$  où  $g_0$  est une métrique représentant un potentiel neutre et le champ d'endomorphismes  ${}^e h$  (relatif à  $g_0$ ) est nilpotent d'indice  $p \geq 2$ .*

Les propriétés suivantes sont des conséquences rapides de la symétrie de  $h$  et de la nilpotence de  ${}^e h$ . Elles sont démontrées dans l'annexe 3.2.

Propriétés :

1.  $\forall x \in \mathcal{C}$ ,  ${}^e h$  est un endomorphisme symétrique pour  $g_0$ , autrement dit,  
 $\forall X \text{ et } Y \in T_x(\mathcal{C}), \quad g_0({}^e h_x(X), Y) = g_0(X, {}^e h_x(Y)).$
2.  $\forall q \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathcal{C}, \quad \text{trace}({}^e h_x)^q = 0.$
3. quelle que soit la base de  $T_x(\mathcal{C})$ ,  $\det(g_{ij}(x)) = \det(g_{0ij}(x)).$

La propriété 3. est très importante et a en particulier pour conséquence le fait que l'élément de volume  $\eta$  relatif à  $g$  ( $\eta = \sqrt{\det(g_{ij})} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$ ) est le même que celui relatif à  $g_0$ . Ce résultat sera fondamental dans l'étude des phénomènes quantiques qui fait intervenir les potentiels « actifs » et est, à mon avis, la propriété essentielle qui justifie le terme « potentiel ».

Le lemme suivant, dont la démonstration, très simple, est présentée dans l'annexe 3.2, est une conséquence du choix de la signature de  $g_0$  et de la nilpotence de  ${}^e h$ . Il apparaît ici l'importance du fait que la signature de  $g_0$  soit exactement de la forme  $(-, +, +, +, -, +, \dots, +)$ , ceci sera encore plus fondamental dans l'étude des phénomènes quantiques.

**Lemme 2.** *Soit  $Y$  le champ de vecteurs unitaires de genre temps caractérisant l'électromagnétisme déjà présenté, ici « transporté sur la cellule  $\mathcal{C}$  ».*

*Soit  $X_0$  un champ de vecteurs unitaires de genre temps  $g_0$ -orthogonal à  $Y$  (il en existe une infinité compte tenu de la signature de  $g_0$ ).*

*Alors, quel que soit  $x \in \mathcal{C}$  l'endomorphisme  ${}^e h_x$  est nul sur l'espace  $g_0$ -orthogonal à l'espace engendré au point  $x$  par les  $2p$  champs de vecteurs :*

$$Y, {}^e h(Y), \dots, {}^e h^{p-1}(Y), X_0, {}^e h(X_0), \dots, {}^e h^{p-1}(X_0).$$

*Le champ d'endomorphismes  ${}^e h$  est donc entièrement déterminé par ses valeurs sur ces  $2p$  champs de vecteurs (qui, en général, ne sont pas indépendants).*

La remarque suivante va justifier la définition qui va suivre.

*Remarque 9.* La 1-forme différentielle qui caractérise l'électromagnétisme a été définie dans le cadre général par  $Y^b$  où «  $b$  » est relatif à la métrique  $g$ . Dans le cas d'un potentiel « actif » où  $g = g_0 + h$ , le champ de vecteurs associé à  $Y^b$  par  $g_0$  (par  $g$  ce serait évidemment  $Y$  lui-même) n'est autre que  $Y + {}^e h(Y)$ , ceci puisque  $g_{ij}Y^j = g_{0ij}Y^j + h_{ij}Y^j$  et alors  $g_0^{ki}g_{ij}Y^j = Y^k + {}^e h_j^k Y^j$ .

De plus,  $F := d(Y^b) = d(g_{ij}Y^j) = d(h_{ij}Y^j)$  puisque  $d(g_{0ij}Y^j) = 0$ .

Le potentiel électromagnétique est donc complètement caractérisé par le champ de vecteurs  ${}^e h(Y)$  que nous noterons par la suite  $\Upsilon$ . Nous donnons alors la définition suivante :

*Définition 16.* Un potentiel actif est **sans électromagnétisme** si le champ de vecteurs  $\Upsilon := {}^e h(Y) = 0$ .

Nous allons nous intéresser maintenant aux cas particuliers de domaines de type « potentiel » qui vont permettre de retrouver, entre autre, tous les résultats standard qui décrivent le comportement « d'objets élémentaires », chargés électriquement ou non, dans ce que l'on appelle communément un « potentiel newtonien » ou un « potentiel électromagnétique ». Notons que ce sont exactement ces mêmes domaines que l'on réutilisera dans la description des phénomènes quantiques au chapitre 2. **Les indices de nilpotence correspondants aux deux cas présentés seront  $p = 2$  et  $p = 3$ .** Bien sûr, comme la dimension de  $\mathcal{M}$  est  $n$ , l'indice de nilpotence maximum de  ${}^e h$  est  $n - 1$ . L'indice de nilpotence est donc limité par la dimension de la variété compacte  $W$ . Le choix de « petits » indices de nilpotence pourra donc être interprété comme le fait que l'on néglige certains effets liés, par exemple, à une variété compacte  $V_2$  dans une décomposition de  $W$  de la forme  $W = V_1 \times V_2$ .

**a- Les potentiels actifs d'indice 2 sans électromagnétisme** (en particulier les potentiels newtoniens).

La métrique  $g$  définie sur la cellule  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  est de la forme  $g = g_0 + h$  où  $g_0$  est la métrique d'un potentiel neutre et le champ d'endomorphismes  ${}^e h$  (relatif à  $g_0$ ) est **nilpotent d'indice 2**.

Comme l'on suppose que ce potentiel est sans électromagnétisme (cf def. 16), on pose  $\Upsilon := {}^e h(Y) = 0$ .

D'après le lemme 2,  $h$  est alors entièrement déterminé par ses valeurs sur  $Y, X_0, {}^e h(X_0)$  où  $X_0$  est un champ de vecteurs de genre temps, dans l'orientation en temps,  $g_0$ -orthogonal à  $Y$ , normalisé par  $g_0(X_0, X_0) = -1$ . Ce champ peut être considéré comme un champ « d'observation ».

Comme le potentiel est « actif »,  $h$  est supposé non nul. D'autre part, il est facile de vérifier que :  ${}^e h_x = 0 \iff {}^e h_x(X_0) = 0$ . En effet, si  ${}^e h_x(X_0) = 0$ , comme par hypothèse  ${}^e h_x(Y) = 0$  et  ${}^e h_x^2(X_0) = 0$ , le lemme 2 montre que  ${}^e h_x = 0$ . On en déduit en particulier que la fonction  $g_0({}^e h(X_0), X_0)$  n'est pas identiquement nulle.

On donne alors la définition suivante :

*Définition 17.* La fonction non nulle  $v = -\frac{1}{2}g_0({}^e h(X_0), X_0)$  est appelée **la fonction potentiel vue par  $X_0$  du domaine potentiel actif considéré**.

(Le coefficient  $-\frac{1}{2}$  est mis dans le seul but de retrouver ensuite la notion standard de potentiel newtonien).

*Proposition 3.* Si  $g = g_0 + h$  est la métrique représentant un potentiel actif d'indice 2 sans électromagnétisme, alors il existe, sur la partie de  $\mathcal{C}$  où la fonction  $v$  est non nulle, **un unique champ de vecteurs**  $X_1$  qui vérifie :

$$h = -2vX_1^\flat \otimes X_1^\flat \quad \text{et} \quad g_0(X_1, X_0) = 1$$

On a de plus les propriétés suivantes :

$$g_0(X_1, X_1) = 0 \quad (X_1 \text{ est de genre lumière pour } g_0) \quad \text{et} \quad g_0(X_1, Y) = 0.$$

(On rappelle que  $X_1^\flat$  est la 1-forme associée à  $X_1$  **par**  $g_0$ ).

On a donc :

$$g = g_0 - 2vX_1^\flat \otimes X_1^\flat$$

**Démonstration :** On commence par vérifier que :

$$g_0({}^e h(X_0), X_0){}^e h = {}^e h(X_0) \otimes ({}^e h(X_0))^\flat$$

Cela s'obtient facilement en remarquant que, puisque  ${}^e h^2 = 0$ , le deuxième membre de cette égalité est nilpotent d'indice  $\leq 2$ , puis en montrant que l'égalité est vraie appliquée sur  $Y$ ,  $X_0$  et  ${}^e h(X_0)$  et donc vraie partout d'après le lemme 2.

On pose donc, sur la partie où  $v$  est non nulle :

$$X_1 := -\frac{1}{2v}{}^e h(X_0)$$

Alors :

$$g_0(X_1, Y) = -\frac{1}{2v}g_0(X_0, {}^e h(Y)) = 0$$

$$g_0(X_1, X_0) = -\frac{1}{2v}g_0(X_0, {}^e h(X_0)) = 1$$

Et :

$$-2v{}^e h = (2v)^2 X_1 \otimes X_1^\flat$$

D'où :

$${}^e h = -2vX_1 \otimes X_1^\flat$$

L'unicité de  $X_1$  est acquise par le fait que les égalités  ${}^e h = -2vX_1 \otimes X_1^\flat$  et  $g_0(X_1, X_0) = 1$  permettent d'écrire à elles seules :

$${}^e h(X_0) = -2vX_1 \quad \text{d'où} \quad X_1 = -\frac{1}{2v}{}^e h(X_0).$$

L'égalité  $g_0(X_1, X_1) = 0$  est immédiatement vérifiée.

*Remarque 10.* La fonction potentiel  $v$  et le champ  $X_1$  dépendent du choix du champ d'observation  $X_0$ .

Comme on le verra lors du calcul de la courbure de Ricci de ce type de potentiel (cf proposition 5), les hypothèses données dans la définition 12 d'un domaine de type potentiel défini à partir de la courbure d'Einstein, pourront être vérifiées si  $\Delta_{g_0} v = 0$  (voir aussi la remarque 5 pour l'influence de la courbure scalaire). On donne donc la définition suivante :

*Définition 18. Un domaine de type « potentiel newtonien » est un domaine de type potentiel actif d'indice 2 sans électromagnétisme tel que la fonction potentiel  $v$  vérifie  $\Delta_{g_0} v = 0$ .*

**b- les potentiels électromagnétiques.**

La métrique  $g$  définie sur la cellule  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  est de la forme  $g = g_0 + h$  où  $g_0$  est la métrique d'un potentiel neutre et le champ d'endomorphismes  ${}^e h$  (relatif à  $g_0$ ) est **nilpotent d'indice 2 ou 3**.

Le fait que ce potentiel est « électromagnétique » est essentiellement caractérisé par la propriété imposée :  ${}^e h(Y) \neq 0$  (cf. def. 16). On supposera cependant que  $g_0({}^e h(Y), Y) := h(Y, Y) = 0$  de sorte que le champ de vecteurs associé par  $g_0$  à  $Y^b$  (où ici  $b$  est relatif à  $g$ ) est la somme  $g_0$ -orthogonale de  $Y$  et  ${}^e h(Y)$  (cf remarque 9). (On laisse le soin au lecteur de vérifier que, là encore, cette hypothèse peut s'interpréter comme le fait que l'on « néglige » les effets quantiques sur l'électromagnétisme).

Pour préciser que ce potentiel n'est qu'électromagnétique et n'a pas de composante newtonienne, on supposera qu'il existe un champ de vecteurs  $X_0$  de genre temps tel que  ${}^e h^2(X_0) = 0$  et  $g_0({}^e h(X_0), X_0) = 0$  (hypothèses plus faibles que  ${}^e h(X_0) = 0$ , la première égalité est toujours vraie dans le cas de nilpotence 2).

Le lecteur pourra faire la comparaison avec la définition du potentiel actif sans électromagnétisme et remarquer que les rôles de  $Y$  et  $X_0$  sont transposés (ils sont tous les deux de genre temps mais pour les signes «  $-$  » de la signature de  $g_0$  différents), on s'autorise de plus ici à ce que la nilpotence soit d'indice 3. Une différence essentielle apparaît néanmoins due au fait que le champ  $Y$  est parfaitement déterminé (compte tenu de la définition des atlas d'observation) alors que  $X_0$  ne l'est pas et que son choix est considéré comme celui d'un champ d'observation. Dans le cas d'un potentiel électromagnétique que l'on définit ici, les objets qui vont caractériser  $h$  ne dépendent pas du choix de  $X_0$  (grâce à l'hypothèse  ${}^e h^2(X_0) = 0$ ).

Comme on l'a déjà précisé, on note  $\Upsilon := {}^e h(Y)$ .

L'analogie de la proposition 3 s'écrit de la manière suivante :

*Proposition 4. Si  $g = g_0 + h$  est la métrique représentant un potentiel électromagnétique, alors il existe, sur la partie de  $\mathcal{C}$  où  $\Upsilon$  n'est pas nul, un unique champ de vecteurs  $X_2$  tel que :*

$$h = \Upsilon^b \otimes X_2^b + X_2^b \otimes \Upsilon^b$$

(où l'on rappelle que «  $b$  » dans  $X_2^b$  et  $\Upsilon^b$  est relatif à  $g_0$ ).

Ce champ de vecteurs a les propriétés suivantes :

$g_0(X_2, X_2) = 0$  ( $X_2$  est de genre lumière pour  $g_0$ ),  $g_0(X_2, Y) = 1$  et  $g_0(X_2, \Upsilon) = 0$ .

On a donc :

$$g = g_0 + \Upsilon^b \otimes X_2^b + X_2^b \otimes \Upsilon^b$$

**Démonstration** L'unicité de  $X_2^b$  dans la décomposition  $\Upsilon^b \otimes X_2^b + X_2^b \otimes \Upsilon^b$ , lorsque  $\Upsilon$  n'est pas nul, est une simple propriété tensorielle due au fait que  $h$  est symétrique de rang 2.

On montre l'existence d'une telle décomposition en considérant deux cas :

1. On suppose que  $g_0(\Upsilon_x, \Upsilon_x) := g_0({}^e h_x(Y_x), {}^e h_x(Y_x)) \neq 0$ .

(L'indice de nilpotence de  ${}^e h_x$  est ici 3).

On commence par vérifier que, au point  $x$  (omis dans l'écriture des lignes qui suivent) :

$${}^eh = \frac{1}{g_0(\Upsilon, \Upsilon)} (\Upsilon \otimes ({}^eh^2(Y))^b + ({}^eh^2(Y)) \otimes \Upsilon^b) \quad (1.1)$$

D'après le lemme 2,  ${}^eh$  s'annule sur l'espace  $g_0$ -orthogonal à :  $Y, {}^eh(Y), {}^eh^2(Y), X_0, {}^eh(X_0)$ . Il est donc rapide de vérifier que le deuxième membre de 1.1 s'annule aussi sur cet espace.

Pour montrer 1.1, il ne reste donc plus qu'à vérifier que l'égalité a lieu lorsque chaque membre est appliqué successivement à  $Y, {}^eh(Y), {}^eh^2(Y), X_0, {}^eh(X_0)$ , ce qui ne pose aucune difficulté en utilisant le fait que  ${}^eh$  est  $g_0$ -symétrique,  ${}^eh^3 = 0$ ,  $h(Y, Y) = 0$ ,  ${}^eh^2(X_0) = 0$  et après avoir montré que :

$${}^eh(X_0) = (h(Y, X_0)/g_0(\Upsilon, \Upsilon)){}^eh^2(Y)$$

Ce dernier point s'obtient avec la même méthode en considérant les formes linéaires associées à chacun des deux membres et en utilisant le fait que  $h(X_0, X_0) := g_0({}^eh(X_0), X_0) = 0$ .

La décomposition souhaitée est alors obtenue par 1.1 en posant :

$$X_2 := (g_0(\Upsilon, \Upsilon))^{-1}{}^eh^2(Y)$$

Il est alors immédiat de vérifier que  $g_0(X_2, X_2) = 0$ ,  $g_0(X_2, Y) = 1$  et  $g_0(X_2, \Upsilon) = 0$ .

2. On suppose que  $g_0(\Upsilon_x, \Upsilon_x) = 0$  et  ${}^eh_x(Y) \neq 0$ , autrement dit  ${}^eh_x(Y)$  est de genre lumière (c'est le cas si l'indice de nilpotence est 2).

Alors, aux points  $x$  considérés (omis dans l'écriture des lignes qui suivent) :

$$h(X_0, Y) := g_0({}^eh(X_0), Y) \neq 0$$

(en particulier  $h(X_0) \neq 0$ )

En effet, on a :

$$0 = g_0({}^eh(Y), Y) = g_0({}^eh(Y), {}^eh(Y)) = g_0({}^eh(Y), {}^eh^2(Y)) = g_0({}^eh(Y), {}^eh(X_0))$$

Si  $g_0({}^eh(X_0), Y) = g_0(X_0, {}^eh(Y))$  était nul, la forme linéaire  $g_0$ -associée à  ${}^eh(Y)$  serait nulle d'après le lemme 2, ce qui est contraire à l'hypothèse.

On vérifie alors que :

$${}^eh = (h(X_0, Y))^{-1}({}^eh(Y) \otimes ({}^eh(X_0))^b + {}^eh(X_0) \otimes ({}^eh(Y))^b)$$

Ceci en utilisant la même procédure que dans le premier cas.

La décomposition souhaitée est obtenue en posant :

$$X_2 = (h(X_0, Y))^{-1}{}^eh(X_0)$$

Il est alors immédiat de vérifier que :  $g_0(X_2, X_2) = 0$ ,  $g_0(X_2, Y) = 1$  et  $g_0(X_2, \Upsilon) = 0$ .



*Remarque 11.* Un potentiel actif, de métrique  $g$ , a été défini (pour simplifier) sur une cellule type  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$ , mais lorsque  $(\mathcal{V}, \zeta)$  est la carte de l'atlas d'observation telle que  $\zeta(\mathcal{V}) = \mathcal{C}$ ,  $g$  n'est autre que l'image  $\zeta_*(g_{\mathcal{M}})$  de la métrique riemannienne définie sur  $\mathcal{M}$ .

Suite à la remarque 7, lorsque  $(\mathcal{V}', \zeta')$  est une autre carte de l'atlas d'observation telle que  $\zeta'(\mathcal{V}') = \mathcal{C}' \times S^1(\delta) \times W$ , lorsque  $\sigma := \zeta \circ \zeta'^{-1} : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  est une isométrie de la forme  $\Lambda \times I_{S^1 \times W}$  et  $\Lambda : \Theta' \rightarrow \Theta$  est une transformation de Lorentz standard, la métrique  $g' = (\zeta'^{-1})^*(g) = \sigma^*g$ , définie sur  $\Theta' \times S^1(\delta) \times W$ , s'écrit sous la forme  $g_0 + \sigma^*h$ .

Dans le cadre d'un potentiel actif sans électromagnétisme, la fonction potentiel  $v'$  vue par  $\sigma_*^{-1}X_0$ , « lue » dans  $(\mathcal{V}', \zeta')$ , est donc égale à  $v \circ \sigma$  et  $X'_1 = \sigma_*^{-1}X_1$ .

Dans le cadre d'un potentiel électromagnétique  $\Upsilon' = \sigma_*^{-1}\Upsilon$  et  $X'_2 = \sigma_*^{-1}X_2$ .

## 1.5 Les géodésiques des domaines de type « potentiel »

La détermination des géodésiques sera effectuée de manière habituelle en commençant par calculer les symboles de Christoffel des métriques correspondantes dans un système de coordonnées standard de la cellule type considérée.

Le calcul des symboles de Christoffel demande celui de l'inverse de la matrice  $(g)$  dans le système de coordonnées choisi. L'hypothèse de  $p$ -nilpotence de  ${}^eh$  permet d'obtenir rapidement la matrice  $(g)^{-1}$  dont les termes sont conventionnellement notés  $g^{ij}$ . En effet, comme  $g = g_0 + h$ ,  $(g_0)^{-1}(g) = I + ({}^eh)$  et, puisque  ${}^eh^p = 0$ , l'inverse de la matrice  $I + ({}^eh)$  n'est autre que :

$$I - ({}^eh) + ({}^eh)^2 + \dots + (-1)^{p-1}({}^eh)^{p-1}$$

. Alors,  $(g_0)^{-1}(g) = I - ({}^eh) + \dots + (-1)^{p-1}({}^eh)^{p-1}$ , donc :

$$g^{ij} = g_0^{ij} - h^{ij} + h_k^i h^{kj} + \dots + (-1)^{p-1} h_{k_1}^i h_{k_2}^{k_1} \dots h^{k_{p-1}j}$$

. **Attention**, ici  $(h^{ij})$  n'est pas l'inverse de la matrice  $(h_{ij})$  (qui en général n'est pas inversible) mais est définie, on le rappelle, par  $h^{ij} = g_0^{ik} g_0^{jl} h_{kl}$ . Par contre  $(g^{ij})$  est bien l'inverse de la matrice  $(g_{ij})$  (et n'est pas  $g_0^{ik} g_0^{jl} g_{kl}$ ).

En particulier, si  $p = 2$  :

$$g^{ij} = g_0^{ij} - h^{ij}. \quad (1.2)$$

Si  $p = 3$  :

$$g^{ij} = g_0^{ij} - h^{ij} + h_k^i h^{kj}. \quad (1.3)$$

### 1.5.1 Les géodésiques d'un domaine de type potentiel sans électromagnétisme

La cellule type est de la forme  $\mathcal{C} = \Theta \times W$  où ici le cercle  $S^1(\delta)$  est considéré être un facteur de la variété compacte  $W$ , celui-ci n'intervenant pas lorsqu'il n'y a pas d'électromagnétisme.

L'ouvert  $\Theta \subset \mathbb{R}^4$  sera de la forme  $\Theta = I \times \mathcal{U}$  où  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{U}$  un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ . Cette décomposition est justifiée par le fait que les domaines de type potentiel sans électromagnétisme, définis dans la proposition 3, ne sont pas « Lorentz-invariants » lorsque l'on choisit  $X_0 = \frac{\partial}{\partial t}$  lié au système de coordonnées standard.

D'après la proposition 3, la métrique pseudo-riemannienne  $g$  s'écrit :

$$g = g_0 - 2vX_1^b \otimes X_1^b \quad \text{où} \quad g_0 = g_\Theta \times g_W$$

$X_1$  est un champ de vecteurs (associé à  $X_0$ ) qui vérifie :

$$g_0(X_1, X_1) = 0, \quad g_0(X_1, Y) = 0, \quad g_0(X_1, X_0) = 1$$

Dans le but de retrouver précisément les résultats sur les géodésiques qui décrivent les mouvements classiques d'un objet élémentaire dans un potentiel sans électromagnétisme, nous poserons l'hypothèse ( $H_N$ ) suivante.

**Hypothèse  $H_N$  :**

1. La fonction potentiel  $v$  est définie sur  $\mathcal{U}$ .
2. Le champ de vecteurs  $X_1$  est défini sur  $I \times W$  et est un champ de Killing.

(La fonction  $v$  et le champ  $X_1$  peuvent être naturellement considérés comme définis sur  $\mathcal{C}$  :  $v$  ne dépend que des variables de  $\mathcal{U}$  et  $X_1$  est tangent à  $I \times W$ )

Il serait intéressant d'étudier les modifications apportées aux géodésiques que l'on va décrire lorsque l'on ne suppose plus l'hypothèse  $H_N$ , en particulier dans le cas où la fonction potentiel est de la forme  $v = -\frac{m}{r}$  (cf section 1.7) et d'estimer les perturbations sur les coniques habituelles.

### Calcul des symboles de Christoffel

Dans un système de coordonnées standard de la cellule  $\mathcal{C}$ , on note :

$\Gamma_{ij}^k$  (resp  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ ) les symboles de Christoffel de  $g$  (resp  $g_0$ ).

On note  $T_{ij}^k$  les coordonnées du **tenseur**  $(\Gamma_{ij}^j - \tilde{\Gamma}_{ij}^k)$ .

On a, lorsque  $g = g_0 + h$  :

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}) \quad (1.4)$$

où les  $\nabla_i$  sont relatifs à  $g_0$ .

(Ce résultat se montre facilement en prenant un système de coordonnées normales pour  $g_0$ ).

Ici  $h = -2vX_1 \otimes X_1$ .

**Dans la suite de ce calcul,  $X_1$  sera noté simplement  $X$  pour simplifier l'écriture.**

On a :  $g^{kl} = g_0^{kl} + 2vX^kX^l$

Et :  $\nabla_j(h_{il}) = -2\nabla_j(vX_iX_l) = -2((\nabla_j v)X_iX_l + v(X_i\nabla_jX_l + X_l\nabla_iX_j))$

Alors, en développant 1.4 et en utilisant le fait que  $X_1$  est un champ de Killing

(c.a.d  $\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0$ ), on obtient :

$$T_{ij}^k = -(g_0^{kl} + 2vX^k X^l)((\nabla_j v)X_i X_l + (\nabla_i v)X_j X_l - (\nabla_l v)X_i X_j + 2v(X_i \nabla_j X_l + X_j \nabla_i X_l))$$

Comme  $X(v) = 0$  et  $X^l X_l = 0$  :

$$T_{ij}^k = -X^k((\nabla_j v)X_i + (\nabla_i v)X_j) + (\nabla^k v)X_i X_j - 2v(X_i \nabla_j X^k + X_j \nabla_i X^k) \quad (1.5)$$

Et on rappelle que :

$$\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k + T_{ij}^k.$$

On en déduit, puisque  $X^k X_k = 0$  (donc  $X_k \nabla_i X^k = 0$ ) et  $X(v) = 0$  :

$$X_k \Gamma_{ij}^k = X_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k$$

$$\text{Mais, } \nabla_i X_j = \partial_i X_j - X_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k$$

Il s'en suit, comme  $\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0$  :

$$2X_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k = \partial_i X_j + \partial_j X_i$$

D'où :

$$X_k \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(\partial_i X_j + \partial_j X_i) \quad (1.6)$$

### Détermination des géodésiques importantes

On considère une géodésique  $x : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathcal{C}$ .

$$\forall s \in I \quad x(s) = (x^0(s), x^1(s), \dots, x^{n-1}(s)).$$

Pour  $k$  de  $0$  à  $n-1$  et  $\forall s \in I$  :

$$x_{(s)}^{k''} + \Gamma_{ij(x(s))}^k x_{(s)}^{i'} x_{(s)}^{j'} = 0 \quad (1.7)$$

Avec 1.6 on en déduit :

$$X_{k(x(s))} x_{(s)}^{k''} + (\partial_i X_j)_{(x(s))} x_{(s)}^{i'} x_{(s)}^{j'} = 0$$

Autrement dit :

$$\frac{d}{ds}(X_{k(x(s))} x_{(s)}^{k'}) = 0$$

D'où :

$$X_k x^{k'} = K \quad \text{où } K \text{ est une constante}$$

(on ne précise plus, ici et dans la suite, l'indice de paramétrage  $s$ )

On s'intéresse maintenant aux composantes de la géodésique sur « l'espace apparent »  $\mathcal{U}$ .

**Pour  $k$  de  $1$  à  $3$ ,**  $X^k = 0$  et  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k = 0$ , alors, d'après 1.5 :

$$\Gamma_{ij}^k = (\nabla^k v)X_i X_j \quad (\text{où ici } \nabla^k v = \partial^k v).$$

L'équation des géodésiques donne alors :

$$\textbf{Pour } k \text{ de } 1 \text{ à } 3, \quad x^{k''} = -(\nabla^k v)X_i X_j x^{i'} x^{j'} = -K^2 \nabla^k v.$$

Un changement de paramétrage affine de la géodésique permet de choisir  $K = 1$  (on ne s'intéressera pas aux géodésiques particulières pour lesquelles  $K = 0$ ).

On obtient finalement :

$$(x^1, x^2, x^3)''_s = -\left(\frac{\partial v}{\partial x^1}, \frac{\partial v}{\partial x^2}, \frac{\partial v}{\partial x^3}\right)_{x(s)} = -(\nabla_{(x^1, x^2, x^3)} v)_{x(s)}$$

**Ce qui n'est rien d'autre que l'équation de Poisson** en physique classique lorsque  $v$  est le potentiel newtonien et  $(x^1(s), x^2(s), x^3(s))$  représente la trajectoire d'un point matériel dans un tel potentiel, **mais ceci en considérant que  $s$  est le paramètre de temps qui, ici, ne correspond pas à  $x^0 = t$** . Le paramètre  $s$  peut être interprété comme le temps propre associé à l'image de la géodésique correspondante.

Remarquons que si l'on suppose le module de la « vitesse », associée à une géodésique, très petit par rapport à la vitesse de la lumière, c'est à dire si  $\forall k \neq 0 \quad x^{k'}(s) = o(1)$  ( $x^0$  correspond à la variable de temps), alors  $x^{0'}(s) = 1 + o(1)$ . En effet, comme  $X_k x^{k'}(s) = 1$ ,  $x^{0'}(s) = 1 - \sum_{k \neq 0} X_k x^{k'}(s)$  puisque  $X_0 = 1$  et de plus  $\sum_{k \neq 0} X_k^2 = 1$ . Ceci signifie que, dans ce cas, le paramètre «  $s$  » est très proche du temps «  $x^0$  » donné par le système de coordonnées, ce qui correspond à l'approximation non relativiste habituelle.

*Remarque 12.* On peut vérifier que, dans le cadre des dernières hypothèses posées  $g(\vec{\nabla}(s), \vec{\nabla}(s)) = g_0(\vec{\nabla}(s), \vec{\nabla}(s)) + h(\vec{\nabla}(s), \vec{\nabla}(s))$  (où  $\vec{\nabla}$  désigne le vecteur tangent à la géodésique), qui est nécessairement une constante  $C_0$ , sera très proche de  $-1$  si l'on suppose que le potentiel  $v = o(1)$ . On aurait pu choisir le paramétrage de la géodésique de sorte que  $C_0 = -1$  (normalisation classique), c'est alors la constante  $K$  qui aurait été éventuellement différente de 1 tout en étant très proche.

### 1.5.2 Les géodésiques d'un domaine de type potentiel électromagnétique

La cellule type est de la forme  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  (ici le cercle  $S^1(\delta)$  est important).

On considère le champ de vecteurs  $\Upsilon = {}^e h(Y)$  qui définit le potentiel électromagnétique et le champ de vecteurs  $X_2$  donné par la proposition 4. D'après celle-ci, la métrique pseudo-riemannienne s'écrit :

$$g = g_0 + \Upsilon^b \otimes X_2^b + X_2^b \otimes \Upsilon^b \quad \text{où} \quad g_0 = g_\Theta \times (-g_{S^1}) \times g_W.$$

$X_2$  est un champ de vecteurs qui vérifie :

$$g_0(X_2, X_2) = 0, \quad g_0(X_2, Y) = 1, \quad g_0(X_2, \Upsilon) = 0.$$

Dans le but de retrouver précisément les résultats sur les géodésiques qui décrivent les mouvements classiques d'un objet élémentaire **chargé électriquement** dans un champ électromagnétique, nous supposons l'hypothèse  $H_E$  suivante que l'on pourra comparer à l'hypothèse  $H_N$  du domaine précédemment étudié.

**Hypothèse  $H_E$  :**

1. a- Le champ de vecteurs  $\Upsilon$  est défini sur  $\Theta$
2. b- Le champ de vecteurs  $X_2$  est défini sur  $S^1(\delta) \times W$  et est un champ de Killing.

(Les champs  $\Upsilon$  et  $X_2$  peuvent être naturellement considérés comme définis sur  $\mathcal{C}$  :  $\Upsilon$  est tangent à  $\Theta$  et ne dépend que des variables de  $\Theta$ ,  $X_2$  est tangent à  $S^1(\delta) \times W$  et ne dépend que des variables de  $S^1(\delta) \times W$ ).

#### Calcul des symboles de Christoffel

On repart de l'expression 1.4 donnée dans l'étude précédente.

$$\text{Ici } h = \Upsilon^b \otimes X_2^b + X_2^b \otimes \Upsilon^b.$$

**Dans la suite de ce calcul  $X_2$  sera noté  $X$  pour simplifier l'écriture.**

On a :  $g^{kl} = g_0^{kl} - h^{kl} + h^{km}h_m^l$ , c'est à dire :

$$g^{kl} = g_0^{kl} - (\Upsilon^k X^l + \Upsilon^l X^k) + (\Upsilon^k X^m + \Upsilon^m X^k)(\Upsilon_m X^l + \Upsilon^l X_m)$$

D'où, puisque  $X^m X_m = 0$  et  $X^m \Upsilon_m = 0$  :

$$g^{kl} = g_0^{kl} - (\Upsilon^k X^l + \Upsilon^l X^k) + (\Upsilon^m \Upsilon_m) X^k X^l$$

Alors :

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2}(g_0^{kl} - (\Upsilon^k X^l + \Upsilon^l X^k) + (\Upsilon^m \Upsilon_m) X^k X^l)(\nabla_j h_{il} + \nabla_i h_{jl} - \nabla_l h_{ij})$$

En développant et en utilisant le fait que  $\nabla_i X_j + \nabla_j X_i = 0$ , on obtient :

$$(*) := (\nabla_j h_{il} + \nabla_i h_{jl} - \nabla_l h_{ij}) = X_i F_{jl} + X_j F_{il} + 2(\Upsilon_i \nabla_j X_l + \Upsilon_j \nabla_i X_l) + X_l(\nabla_j \Upsilon_i + \nabla_i \Upsilon_j)$$

où l'on a noté  $F_{ij} = \nabla_i \Upsilon_j - \nabla_j \Upsilon_i = \partial_i \Upsilon_j - \partial_j \Upsilon_i$  les composantes de la 2-forme différentielle  $F := dY^\flat = d\Upsilon^\flat$ .

Remarquons que, d'après l'hypothèse  $(H_E)$ ,  $X^l F_{jl} = 0$ .

Alors, puisque  $X^l X_l = 0$  (donc  $X^l \nabla_i X_l = 0$ ) :

$$X^l (*) = 0$$

D'où, puisque  $\Upsilon^l X_l = 0$  :

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2}(X_i F_j^k + X_j F_i^k) + \Upsilon_i \nabla_j X^k + \Upsilon_j \nabla_i X^k + X^k(\nabla_j \Upsilon_i + \nabla_i \Upsilon_j - \Upsilon^l (*)) \quad (1.8)$$

Il s'en suit :

$$X_k T_{ij}^k = 0$$

D'où

$$X_k \Gamma_{ij}^k = X_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k$$

Puis, comme pour le potentiel sans électromagnétisme, on en déduit ici aussi :

$$2X_k \tilde{\Gamma}_{ij}^k = \partial_i X_j + \partial_j X_i,$$

Alors :

$$X_k \Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(\partial_i X_j + \partial_j X_i) \quad (1.9)$$

### Détermination des géodésiques importantes

On considère une géodésique  $x : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathcal{C}$ .

$$\forall s \in I \quad x(s) = (x^0(s), x^1(s), \dots, x^{n-1}(s)).$$

Pour  $k$  de 0 à  $n-1$  et  $\forall s \in I$  :

$$x^{k''}(s) + \Gamma_{ij(x(s))}^k x^{i'}(s) x^{j'}(s) = 0 \quad (1.10)$$

Avec 1.9 on en déduit :

$$X_{k(x(s))} x^{k''} + (\partial_i X_j)_{(x(s))} x^{i'} x^{j'} = 0$$

Autrement dit :

$$\frac{d}{ds}(X_{k(x(s))} x^{k'}) = 0$$

D'où :

$$X_k x^{k'} = K \quad \text{où } K \text{ est une constante}$$

(on ne précise plus, ici et dans la suite, l'indice de paramétrage  $s$ )

On s'intéresse maintenant aux quatre premières composantes de la géodésique qui correspondent à l'espace-temps « classique »  $\Theta$ .

D'après 1.8 et puisque  $\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k + T_{ij}^k$ ,

**Pour  $k$  de 0 à 3 :**

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(X_i F_j^k + X_j F_i^k)$$

Alors l'équation 1.10 des géodésiques s'écrit :

$$x^{k''} + \frac{1}{2}(X_i F_j^k + X_j F_i^k) x^{i'} x^{j'} = 0$$

C'est à dire,

**Pour  $k$  de 0 à 3 :**

$$x^{k''} + K F_i^k x^{i'} = 0 \quad (1.11)$$

On paramètre classiquement la géodésique de sorte que  $g(x'(s), x'(s)) = -1$  et que  $x'(s)|_{T_{x(s)}(\Theta)}$  soit dans l'orientation en temps donnée par  $x^0$ .

On note  $\vec{\nabla}_{(s)} = (x^{0'}(s), x^{1'}(s), x^{2'}(s), x^{3'}(s))$  le vecteur formé des quatre premières composantes du vecteur  $x'(s)$  tangent à la géodésique.

L'équation 1.11 s'écrit alors puisque  $F_i^k = -F^k_i$  :

$$\vec{\nabla}'_{(s)} = K^e F_{x(s)}(\vec{\nabla})_{(s)}$$

où  $^e F$  est le champ d'endomorphismes associé à  $F$  relativement à  $g_0$ .

**On retrouve l'expression classique (de la relativité restreinte) qui donne l'équation de mouvement d'une particule de masse  $m$  et de charge électrique  $q$  dans un champ électromagnétique  $F$  lorsque l'on a posé  $K = \frac{q}{m}$  et lorsque  $s$  représente effectivement le temps propre de la particule ( voir, par exemple, [2] (17-61) p.554). Le résultat disant que le mouvement d'un objet élémentaire est décrit par les géodésiques est connu en relativité générale mais uniquement dans le cadre de la gravitation. On vient de montrer ici que, pour nous, ce résultat est encore valable dans le cadre de l'électromagnétisme.**

Ce que l'on vient d'écrire n'est qu'une vérification, sur cet exemple, du principe de calcul du mouvement d'un objet élémentaire chargé électriquement dans un potentiel dont on a parlé dans la section 1.3.

Ici  $K = \frac{q}{m} = X_k x^{k'}$  est une caractéristique de la géodésique sur la variété compacte  $S^1(\delta) \times W$  puisque  $X_k = 0$  pour  $k$  de 0 à 3.

*Remarque 13.* Comme le paramétrage de la géodésique est choisi de sorte que  $g(x'(s), x'(s)) = -1$  et puisque  $g_{ij} = g_{0ij} + \Upsilon_i X_j + X_i \Upsilon_j$  on a :

$$\forall s \in I \quad x^{0'^2}_{(s)} + x^{4'^2}_{(s)} = 1 + \sum_{k \neq 0 \text{ et } 4} x^{k'^2}_{(s)} + 2K \Upsilon_{i(x(s))} x^{i'}_{(s)}$$

Si l'on suppose que pour  $i$  de 0 à 3 :  $K \Upsilon_i = o(1)$  et que, pour  $k \neq 0$  :  $x^{k'}(s) = o(1)$  (ce qui dit en particulier que la « vitesse » déterminée par la géodésique est très petite par rapport à la vitesse de la lumière) alors  $x^{0'}(s) = 1 + o(1)$  (compte tenu du choix du paramétrage dans l'orientation en temps relatif à  $x^0$ ) et le paramètre «  $s$  » est très proche du « temps  $x^0$  » donné par le système de coordonnées, ce qui correspond à l'approximation non relativiste habituelle.

## 1.6 La courbure de Ricci, la courbure scalaire et différentes propriétés des domaines de type potentiel

### 1.6.1 Les potentiels actifs sans électromagnétisme d'indice 2

On rappelle que, d'après la proposition 3,  $g = g_0 - 2vX_1^\flat \otimes X_1^\flat$  où  $v$  est la fonction potentiel et  $X_1$  vérifie :

$$g_0(X_1, X_1) = 0, \quad g_0(X_1, Y) = 0, \quad g_0(X_1, X_0) = 1.$$

On suppose de plus ici, comme lors de l'étude des géodésiques (cf. 1.5.1), que l'hypothèse  $H_N$  est vérifiée, et, pour ne pas faire intervenir des termes liés à  $D_{g_0}X_1$  dans les résultats qui vont suivre, on supposera que  $D_{g_0}X_1 = 0$ , ce qui est une hypothèse plus forte que le fait que  $X_1$  soit un champ de Killing. Ces hypothèses peuvent être interprétées comme le fait que l'on néglige certains effets quantiques concernant le champ  $X_1$ .

On obtient alors le résultat suivant .

*Proposition 5.*

1.  $R_{icc_g}^\# = R_{icc_{g_0}}^\# - (\Delta_{g_0}v)X_1 \otimes X_1$  (ici  $\Delta_{g_0} := -\nabla^k \nabla_k$ )  
où  $R_{icc_{g_0}}$  est entièrement déterminé par  $R_{icc_{g_0W}}$  puisque  $R_{icc_{g_0\Theta}} = 0$ .
2.  $S_g = S_{g_0} + 2vR_{icc_{g_0}}(X_1, X_1)$   
où  $S_{g_0} = S_{g_0W}$ .
3.  $X_1$  est aussi de genre lumière pour la métrique  $g$  et  $D_gX_1 = 0$ .
4.  $D_gY = 0$ , en particulier  $Y$  est un champ de Killing et un champ géodésique pour la métrique  $g$  (ceci est évidemment vrai pour la métrique  $g_0$ ).

La démonstration de cette proposition est détaillée dans l'annexe 3.3.

*Remarque 14.* Si  $R_{icc_{g_0}}(X_1, X_1) = 0$ , la courbure scalaire  $S_g$  reste égale à celle du potentiel neutre  $S_{g_0}$ . Ceci est le cas, par exemple, lorsque  $W$  est une variété riemannienne produit  $V_1 \times V_2$  où  $(V_2, g_{V_2})$  est une variété d'Einstein et lorsque  $X_1$  est tangent à  $V_2$  (on peut avoir  $\dim V_1 = 0$ ). En effet, on a alors  $R_{icc_{g_0}}(X_1, X_1) = C^{te}g_0(X_1, X_1) = 0$ .

En fait, dans les expériences « standard » la fonction potentiel  $v$  est en général  $\ll 1$  (en unités géométriques). Compte tenu de la normalisation de  $X_1$  par  $g_0(X_1, X_0) = 1$ , on peut écrire dans ce cas :  $|2vR_{icc_{g_0}}(X_1, X_1)| \ll |S_{g_0}|$  et  $S_g$  reste très proche de  $S_{g_0}$  qui est constante par définition.

### 1.6.2 Les potentiels électromagnétiques

D'après la proposition 4 :  $g = g_0 + \Upsilon^\flat \otimes X_2^\flat + X_2^\flat \otimes \Upsilon^\flat$

où le champ de vecteurs  $\Upsilon$  est le potentiel électromagnétique et  $X_2$  vérifie :

$$g_0(X_2, X_2) = 0, \quad g_0(X_2, Y) = 1, \quad g_0(X_2, \Upsilon) = 0.$$

On suppose de plus ici, comme pour l'étude des géodésiques (cf. 1.5.2), que l'hypothèse  $H_E$  est vérifiée, ou bien, pour anticiper sur la section 2.15 où l'on tient compte des effets de « spin », que l'hypothèse  $H'_E$  suivante est vérifiée.

**Hypothèse  $H'_E$** 

1. Le champ de vecteurs  $\Upsilon$  est défini sur  $\Theta \times S^3(\rho)$ .
2. Le champ de vecteurs  $X_2$  est défini sur  $S^1(\delta) \times V$ .

Ceci lorsque la cellule type est de la forme  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$  (cf. section 2.15).

Que ce soit sous l'hypothèse  $H_E$  ou  $H'_E$ , on supposera de plus, comme pour la proposition 5 avec le champ  $X_1$ , que  $D_{g_0}X_2 = 0$ .

*Proposition 6.* On note  $F$  la 2-forme différentielle de l'électromagnétisme :  $F = d(Y^b_s) = d(\Upsilon^b)$ .

1.  $R_{icc_g}^\sharp = R_{icc_{g_0}}^\sharp + \frac{1}{2}(f(X_2 \otimes X_2) - (\nabla_{g_0} \cdot F) \otimes X_2 - X_2 \otimes (\nabla_{g_0} \cdot F))$   
où la fonction  $f := \frac{1}{2}g_0^{ik}g_0^{jl}F_{kl}F_{ij}$  et  $\nabla_{g_0} \cdot F$  est le champ de vecteurs divergence de  $F$  relative à  $g_0$  ( $\nabla_{g_0} \cdot F$  a pour composantes  $\nabla_i(g_0^{ik}F_k^j)$ ).
2.  $S_g = S_{g_0} + (\Upsilon^k \Upsilon_k)R_{icc_{g_0}}(X_2, X_2)$ .
3.  $X_2$  est aussi de genre lumière pour  $g$  et  $D_g X_2 = 0$ .
4.  $Y$  est un champ de Killing et un champ géodésique pour  $g$  (ceci est évidemment vrai pour  $g_0$ ).

La démonstration de cette proposition est détaillée dans l'annexe 3.4.

*Remarque 15.* Si  $R_{icc_{g_0}}(X_2, X_2) = 0$ , la courbure scalaire  $S_g$  reste égale à celle du potentiel neutre  $g_0$  (cf remarque 14). Là encore, dans les expériences « standard »,  $|(\Upsilon^k \Upsilon_k)R_{icc_{g_0}}(X_2, X_2)| \ll |S_{g_0}|$  et  $S_g$  reste donc très proche de  $S_{g_0}$ .

## 1.7 Remarques sur le domaine de type « potentiel newtonien »

La cellule type considérée ici est de la forme  $\mathcal{C} = \Theta \times W$  avec  $\Theta = I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4$ .

La métrique pseudo-riemannienne  $g$  vérifie, d'après la proposition 3,  $g = g_0 - 2vX_1^b \otimes X_1^b$  et l'on choisit ici  $X_0 = \frac{\partial}{\partial t}$  lié au système de coordonnées standard de la cellule  $\mathcal{C}$ . On suppose de plus que l'hypothèse utilisée pour la proposition 5 est encore valide.

Ce domaine mériterait une étude plus approfondie que celle que l'on va présenter dans cette section, en particulier lorsque la fonction  $|v|$  n'est pas  $\ll 1$  (c.a.d lorsque « l'approximation newtonienne » n'est plus valable). On se bornera à faire quelques remarques élémentaires.

Regardons par exemple le cas pour lequel, dans le système de coordonnées standard,  $v = -\frac{m}{r}$  où  $m$  est une constante positive et  $r = (\sum_{k=1}^3 x^{k2})^{1/2}$ .

Le domaine considéré est alors à « symétrie sphérique en espace » pour les coordonnées habituelles  $(x_1, x_2, x_3)$  de  $\mathcal{U}$  (mais il ne faut pas oublier que les autres « dimensions » sont fondamentales).

On a ici  $\Delta v = 0$  (def. 18) et on a vu que (cf paragraphe 1.5.1), pour la métrique  $g = g_0 + \frac{2m}{r}X_1^b \otimes X_1^b$  les géodésiques  $x_{(s)} = (x_{(s)}^0, \dots, x_{(s)}^{n-1})$  vérifient (du moins celles qui nous intéressent) :  $(x_{(s)}^1, x_{(s)}^2, x_{(s)}^3)'' = (-\nabla v)_{x(s)} = mr_{x(s)}^{-2}$ .



On en déduit, comme en physique newtonienne standard, que les composantes sur  $\mathcal{U}$  de ces géodésiques ont pour images des coniques dont «  $O$  » est un foyer et que les lois de Kepler restent valables, **mais en considérant le paramètre «  $s$  » et non le temps «  $x^0 = t$  » du système de coordonnées**, «  $s$  » pouvant être très différent de «  $t$  » si la fonction  $|v|$  n'est pas  $\ll 1$ .

Puisque  $g(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t}) = -1 + \frac{2m}{r}$ , le champ de vecteurs  $\frac{\partial}{\partial t}$  ( $= \frac{\partial}{\partial x^0}$ ) est de genre temps si  $r > 2m$ , de genre lumière si  $r = 2m$  et de genre espace si  $0 < r < 2m$ . La distance « critique » est ici  $2m$  qui correspond exactement au rayon de Schwarzschild et ceci suggère de comparer ce domaine de type « potentiel newtonien » que l'on vient d'étudier à un domaine de type « Schwarzschild » dont la cellule type sera définie comme le couple  $(\mathcal{C}, g_S)$  pour lequel  $\mathcal{C} = \Theta \times W$  où  $\Theta = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3*}$  et  $g_S$  est la métrique produit :  $g_S := g_{S_\Theta} \times g_W$  pour laquelle  $g_{S_\Theta}$  désigne **la métrique classique de Schwarzschild** qui s'écrit, pour les coordonnées  $(t, r, \varphi, \phi)$  sur  $\mathbb{R} \times ]2m, +\infty[ \times S^2 \sim \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{3*}$  :

$$g_{S_\Theta}(t, r, \varphi, \phi) = (-1 + \frac{2m}{r})dt^2 + (1 - \frac{2m}{r})^{-1}dr^2 + r^2(d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\phi^2)$$

Bien entendu, il n'y a mathématiquement aucun intérêt à faire le produit de  $g_{S_\Theta}$  par  $g_W$ , il s'agit simplement de ramener le domaine classique de Schwarzschild de dimension 4 aux domaines que l'on a étudiés ici en dimension  $n$ . (on peut aussi considérer plus généralement le domaine de Schwarzschild « étendu » pour  $0 < r < 2m$ ).

Comparons alors quelques propriétés du type (1) : « potentiel newtonien » à celles du type (2) : « Schwarzschild » que l'on vient de définir.

1. Les deux courbures de Ricci :  $R_{icc_g}$  et  $R_{icc_{g_S}}$  sont identiques, toutes les deux égales à  $R_{icc_{g_0}}$  déterminée par  $R_{icc_{g_{0W}}}$  puisque  $R_{icc_{g_{0\Theta}}} = 0$  (cf proposition 5).
2. Pour  $r \gg 2m$ , d'après la proposition 3, les composantes des géodésiques sur  $\Theta$  du type (1) que l'on a décrites et celles de genre temps du type (2) redonnent avec une très bonne précision, les trajectoires d'un objet élémentaire autour d'une « masse »  $m$  à symétrie sphérique sur « l'espace  $\mathcal{U}$  », calculées avec la physique newtonienne standard.

On remarquera aussi que le coefficient  $(-1 + \frac{2m}{r})$  de «  $dt^2$  » du tenseur  $g$  du type (1) est le même que celui du tenseur  $g_S$  du type (2), cependant, pour le type (1) le « potentiel »  $\frac{2m}{r}$  perturbe les variétés compactes sans toucher à  $\mathcal{U}$ , alors que pour le type (2) le potentiel perturbe  $\mathcal{U}$  sans toucher à  $W$ .

Ces deux types apparaissent donc comme deux cas particuliers « extrêmes » et l'on peut sans doute décrire une famille de types « potentiels newtoniens » pour lesquels le potentiel « perturbe » à la fois  $\mathcal{U}$  et  $W$  et tels que les propriétés 1. et 2. soient conservées. Ces domaines pourront avoir des propriétés différentes lorsque  $r$  n'est pas  $\gg 2m$ .

## 1.8 Un exemple de domaine de type « fluide statique vraiment parfait »

Ce domaine statique sera sans électromagnétisme et la pression apparente sera nulle (mais pas la pression cachée).

L'intérêt de présenter un tel exemple est essentiellement lié au fait qu'un tel domaine ne peut exister dans le cadre de la relativité générale standard. La possibilité de son existence ici est due à la pression « cachée » (qui, évidemment, n'a pas de sens lorsque  $\dim \mathcal{M} = 4$ )

Pour la simplicité des calculs qui vont suivre, nous ne présenterons qu'un cas très particulier.

Le domaine de type « fluide » considéré est un triplet  $(\mathcal{D}, \tilde{g}, \mathcal{A})$  (cf. définition 10) où  $(\mathcal{D}, \tilde{g})$  est isométrique à  $(\mathcal{C}, g)$  défini de la manière suivante :

$$\mathcal{C} = Z \times W \quad \text{où } Z = \Theta \times S^1(\epsilon) \quad \text{et } \Theta = I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^4$$

$W = S^1(\delta) \times V$  où  $V$  est une variété compacte, mais ici cette décomposition de  $W$  ne sera pas utilisée car le domaine est supposé sans électromagnétisme et le cercle « habituel »  $S^1(\delta)$  n'intervient pas .

(Le cercle  $S^1(\epsilon)$  dans la décomposition de  $Z$  a été introduit uniquement pour simplifier les calculs qui vont suivre).

La cellule type  $\mathcal{C}$  est munie du système de coordonnées standard  $(t, x^1, x^2, x^3, v, w)$  (la coordonnée  $v$  est ici celle de  $S^1(\epsilon)$ ).

La métrique  $g$  est de la forme  $g = g_Z \times g_W$ , la signature de  $g_W$  est  $(-, +, \dots, +)$ .

La métrique  $g_Z$  est de la forme  $g_Z = g'_0 + \beta \otimes X_1^\flat + X_1^\flat \otimes \beta$

où  $g'_0 = g_\Theta \times g_{S^1(\epsilon)}$  ( $g_\Theta$  étant la métrique de Minkovski et  $g_{S^1(\epsilon)}$  la métrique riemannienne standard sur  $S^1(\epsilon)$ ).

$\beta$  est une 1-forme différentielle définie sur  $\mathcal{U} : \beta = adx^1 + bdx^2 + cdx^3$  où  $a, b, c : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  sont trois fonctions régulières.

$X_1$  est le champ de vecteurs défini sur  $Z$  tel que  $X_1^\flat = dt + dv$  (où  $\flat$  est relatif à  $g'_0$ ).

( $a, b, c$  et  $X_1$  peuvent, bien sûr, être considérés définis sur la cellule  $\mathcal{C}$ )

Dans le système de coordonnées standard, les composantes de  $g$  ne dépendent pas de «  $t$  », c'est en ce sens que **le domaine est qualifié de statique**.

Le tenseur  $g$  est à rapprocher de celui d'un domaine de type « potentiel électromagnétique » à la différence (fondamentale) que  $X_1^\flat = dt + dv$  remplace  $X_2^\flat = du + dv$  qui aurait donné exactement un exemple de potentiel électromagnétique (ici  $u$  est la coordonnée de  $S^1(\delta)$ ). Comme les fonctions considérées sont indépendantes de «  $t$  », on peut utiliser les résultats obtenus pour un domaine de type « potentiel électromagnétique » où  $(Y_0, Y_1, Y_2, Y_3)$  devient  $(0, a, b, c)$ . Les rôles de «  $t$  » et de «  $u$  » sont transposés par le choix de  $X_1$  à la place de  $X_2$ . En fait, un logiciel de calcul donne rapidement le résultat suivant :

On note  $(A, B, C) := \text{rot}(a, b, c)$  c'est à dire  $A = (\frac{\partial b}{\partial x^3} - \frac{\partial c}{\partial x^2})$ ,  $B = (\frac{\partial c}{\partial x^1} - \frac{\partial a}{\partial x^3})$ ,  $C = (\frac{\partial a}{\partial x^2} - \frac{\partial b}{\partial x^1})$ .

On note  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}) := \text{rot}(A, B, C) = \text{rotrot}(a, b, c)$ .

On obtient pour la matrice  $(R_{icc_{g_Z}})$  de la courbure de Ricci de la métrique  $g_Z$  relative au système de coordonnées standard de  $Z$  (matrice d'ordre 5) :

$$(R_{icc_{gz}}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (A^2 + B^2 + C^2) & \mathcal{A} & \mathcal{B} & C & (A^2 + B^2 + C^2) \\ \mathcal{A} & 0 & 0 & 0 & \mathcal{A} \\ \mathcal{B} & 0 & 0 & 0 & \mathcal{B} \\ C & 0 & 0 & 0 & C \\ (A^2 + B^2 + C^2) & \mathcal{A} & \mathcal{B} & C & (A^2 + B^2 + C^2) \end{pmatrix}$$

Et pour la courbure scalaire :  $S_{gz} = 0$

Comme  $g$  est une métrique produit  $g := g_Z \times g_W$ , la courbure de Ricci de  $g$  est maintenant déterminée par la connaissance de la courbure de Ricci de  $g_W$ . De plus  $S_g = S_{gz} + S_{g_W} = S_{g_W}$ .

On suppose maintenant que la courbure scalaire  $S_{g_W}$  est nulle (cette hypothèse est simplificatrice pour le type de fluide présenté ici mais on peut s'en passer (cf. remarque 5), le tenseur  $G$  vérifie alors  $G = 2R_{icc_g}$ .

Pour obtenir un fluide « vraiment parfait » on impose les conditions supplémentaires suivantes :

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}, C) = \text{rotrot}(a, b, c) = 0 \quad \text{et} \quad \mu := A^2 + B^2 + C^2 \neq 0.$$

$$\text{Alors } G_{gz} = \mu X_1^b \otimes X_1^b \quad \text{où} \quad \mu = |\text{rot}(a, b, c)|^2 = A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Dans le système de coordonnées standard, la matrice de  $g_Z$  est :

$$(g_Z) = \begin{pmatrix} -1 & a & b & c & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 & a \\ b & 0 & 1 & 0 & b \\ c & 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & a & b & c & 1 \end{pmatrix}$$

Quel que soit  $x \in \mathcal{C}$ , l'espace apparent  $H_x$  est de dimension 4. Il est facile de vérifier que les quatre champs de vecteurs :  $X_0 := \frac{\partial}{\partial t}$ ,  $X_1 := a\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^1} - a\frac{\partial}{\partial v}$ ,  $X_2 := b\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^2} - b\frac{\partial}{\partial v}$ ,  $X_3 := c\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^3} - c\frac{\partial}{\partial v}$  forment en chaque point  $x$  une base  $g_Z$ -orthonormée de  $H_x$ .

Comme  $G(X_0, X_0) = \mu$  et  $G(X_i, X_j) = 0$  lorsque  $(i, j) \neq (0, 0)$ , la matrice de  $G_{H_x}$  dans cette base est :

$$(G_{H_x}) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

D'après les définitions données (cf. 1.4.1), le champ  $X_0 = \frac{\partial}{\partial t}$  est le champ apparent du fluide (ici  $X_0 = X$  est aussi le champ du fluide) et  $\mu$  la fonction densité d'énergie.

La pression apparente  $P_A$  est nulle, la pression cachée  $P_c$  est la pression  $P$  elle-même et  $P = G - \mu X_0^b \otimes X_0^b$ .

On vérifie alors que  $\nabla_g \cdot P = 0$  :

il suffit pour cela, comme  $\nabla_g \cdot G = 0$ , de vérifier que  $\nabla_g \cdot (\mu X_0^b \otimes X_0^b) = 0$ , c'est à dire que  $\nabla_i(\mu T^{ij}) = 0$  où  $X_0 \otimes X_0 := T^{ij} \partial_i \partial_j$  avec  $T^{00} = 1$  et  $T^{ij} = 0$  si  $(i, j) \neq (0, 0)$ .

On a :

$\nabla_i(\mu T^{ij}) = \partial_i(\mu T^{ij}) + \mu(T^{lj}\Gamma_{il}^i + T^{il}\Gamma_{il}^j) = \mu(T^{0j}\Gamma_{i0}^i + \Gamma_{00}^j)$  puisque  $\partial_i(\mu T^{ij}) = \partial_0(\mu T^{00}) = \partial_0\mu = 0$  ( $\mu$  ne dépend pas de  $t$ ).

$$\Gamma_{00}^j = -g^{jl}(\partial_l g_{00}) = 0 \quad \text{car } g_{00} = -1$$

$\Gamma_{i0}^i = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_i g_{l0} + \partial_0 g_{li} - \partial_l g_{i0}) = \frac{1}{2}g^{il}(\partial_i g_{l0} - \partial_l g_{i0}) = 0$  car  $g^{il}$  est symétrique en  $(i, l)$  et  $(\partial_i g_{l0} - \partial_l g_{i0})$  antisymétrique.

Le domaine  $(\mathcal{C}, g, \mathcal{A})$  est donc bien un domaine de type « fluide vraiment parfait » (la vérification des conditions restantes est très rapide), sa pression apparente est nulle et le champ de vecteurs du fluide  $X_0 = X = \frac{\partial}{\partial t}$  est un champ géodésique (pour  $g$  et  $g_0$ ).

Les domaines de type « potentiel » que l'on a présentés, pour lesquels le tenseur pseudo-riemannien  $g$  est donné explicitement, vont être particulièrement importants dans l'étude des phénomènes quantiques que l'on va aborder maintenant, mais ce ne seront pas les géodésiques qui y interviendront, le processus sera tout autre.

## Chapitre 2

# Les phénomènes quantiques

### 2.1 Introduction

Dans la continuité de ce qui a été fait dans le premier chapitre, nous allons définir maintenant les domaines typés de l'espace-temps  $(\mathcal{M}, g)$  qui vont représenter ce que, classiquement, on appelle « des particules dans un potentiel ». Comme le regard que l'on porte sur ces notions est fondamentalement différent de celui de la physique quantique standard, le terme « particule » ne sera plus adapté et nous n'y ferons parfois référence que pour faire le lien entre ce que nous allons présenter et les théories classiques.

La différence essentielle entre les domaines que l'on va définir et ceux présentés dans le premier chapitre va être due au fait que les **variations** du tenseur pseudo-riemannien  $g$  (transporté sur une cellule  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1 \times W$ ), relatives à la variété compacte  $S^1 \times W$ , vont devenir les éléments essentiels de la description des « phénomènes quantiques ». En particulier on ne considérera plus que le champ de vecteurs  $Y$  tangents aux cercles  $S^1_x$  est un champ de Killing. Si l'on avait tenu compte précisément dans le premier chapitre de ces éventuelles variations de  $g$  sur  $S^1 \times W$ , de nombreux termes supplémentaires seraient apparus dans les équations et auraient rendus celles-ci « ingérables », dans le langage de la physique standard cela aurait signifié que les équations auraient rendu compte à la fois des phénomènes « classiques » et « quantiques ». Les approximations que l'on va faire en définissant les types géométriques qui décrivent correctement les « phénomènes quantiques » vont permettre d'obtenir des équations « utilisables », mais vont être de « nature » différente de celles utilisées dans le premier chapitre.

Pour que le lecteur ait une idée claire de la structure de ce deuxième chapitre, on commence par une présentation exhaustive de ce qui va suivre :

Les domaines typés  $(\mathcal{D}, g)$  que l'on va définir auront pour métriques pseudo-riemanniennes des métriques  $g$  construites à partir d'une métrique de référence  $g_0$  qui sera celle d'un potentiel neutre que l'on a déjà définie dans le chapitre précédent. Cette métrique  $g_0$ , transportée sur une cellule  $(\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W)$ , pourra être considérée comme associée à un observateur qui fait les mesures. Le fait que, par définition,  $g_0|_{\Theta}$  est la métrique de Minkovski précise « l'approximation choisie ». Nous pourrions utiliser pour  $g_0|_{\Theta}$  une métrique qui tient compte d'une éventuelle déformation de l'espace-temps  $\Theta$  lié à l'observateur, mais ceci compliquerait évidemment sérieusement les choses et nous nous contenterons pour le moment de retrouver les résultats standard de la physique quantique en considérant que  $g_0|_{\Theta}$  est la métrique de Minkovski.

**Le type géométrique fondamental qui va décrire tous les phénomènes quantiques sera simplement un domaine  $(\mathcal{D}, g)$  « à courbure scalaire constante et conforme à un potentiel ».**

Autrement dit, le tenseur pseudo-riemannien  $g$  sera de la forme  $fg_{\mathcal{P}}$  où  $g_{\mathcal{P}}$  est une métrique de potentiel tel que défini dans le premier chapitre (à partir de  $g_0$ ),  $f$  sera une fonction réelle positive, et la courbure scalaire de  $g$  sera constante, égale à celle de  $g_{\mathcal{P}}$  (elle même égale à celle de  $g_0$ ).

La fonction  $f$  deviendra alors l'objet important de ces domaines et il sera simplificateur de considérer la fonction  $a := f^{4/n-2}$  (où  $n = \dim \mathcal{M}$ ) car la définition même du type géométrique choisi donne une équation différentielle « en  $a$  » plus simple que l'équation équivalente écrite « en  $f$  ». Il va s'avérer que la partie « non linéaire » de l'équation différentielle « en  $a$  » va traduire, en langage de physique classique (qui ne sera plus adapté ici) « l'interaction des particules entre elles » dans le domaine considéré. Comme l'essentiel de ce que nous allons étudier va être consacré aux phénomènes qui « négligent » les interactions des particules entre elles, c'est une **approximation linéaire** de l'équation générale que nous allons utiliser (du moins jusqu'à la section 2.18). Les domaines pour lesquels nous considérerons cette approximation linéaire seront appelés des **domaines à métrique oscillante** car le simple fait que la métrique  $fg_{\mathcal{P}}$  reste à courbure scalaire constante va entraîner dans la plupart des cas de fortes oscillations pour la fonction  $f$ .

Ce sont les caractéristiques de la fonction  $f$  (et donc de la fonction  $a$ ) imposées par le type géométrique choisi qui redonneront les notions standard de masse, charge électrique, spin, etc.

**Les équations linéaires obtenues seront donc des conclusions obligées de la définition du type géométrique fondamental choisi (et de l'approximation linéaire). Aucune loi, aucun principe ne sera ajouté. Ces équations linéaires seront de type « Klein- Gordon » (différentes suivant les potentiels considérés). Les équations de Schrödinger utilisées en physique quantique standard (non relativiste) apparaîtront comme des « approximations naturelles » (que nous préciserons) des équations de « Klein-Gordon » obtenues. Ceci montrera par la suite que l'on retrouve en particulier les résultats qualitatifs et quantitatifs des expériences génériques de la physique quantique classique (diffraction, fentes de Young, déviation par un potentiel, expérience de Stern- Gerlach, intrication quantique, etc.).**

En fait, les domaines de type « métrique oscillante » ne vont pas suffire pour décrire complètement la notion de « particules dans un potentiel » et donc les expériences précédemment évoquées. Il manquera à cette étape une notion de « localisation » (qui, par exemple, précisera la notion « d'impact » sur un écran). Il sera nécessaire de définir plus précisément des domaines typés qui s'apparenteront aux domaines « particules dans un potentiel » de la physique standard. Pour cela il sera suffisant « d'ajouter » dans un domaine  $(\mathcal{D}, g)$  « à courbure scalaire constante conforme à un potentiel » un sous ensemble  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{D}$  de mesure nulle. Les composantes connexes de  $\mathcal{S}$  seront appelées **les singularités élémentaires de  $\mathcal{D}$** . En fait ce sous ensemble pourra être considéré comme celui où le tenseur  $g$  n'est pas défini, mais ce point de vue demande aussi à préciser le comportement de  $g$  au voisinage de  $\mathcal{S}$ . Ce dernier point ne sera pas utile pour l'étude des phénomènes quantiques présentés dans ce papier mais devra être développé pour l'étude de phénomènes plus complexes. Le lecteur pourra donc se contenter de considérer les singularités élémentaires comme de simples parties connexes présentes dans  $\mathcal{D}$ . Aucune loi ne sera donnée sur le « comportement » de ces singularités et l'on supposera seulement que celles-ci sont « équiréparties » relativement à la métrique  $g$  (mais pas  $g_0$ ), ceci dans toute sous-variété de genre espace de dimension maximale  $(n - 2)$ .

Il ne faudra pas considérer qu'une singularité élémentaire « seule » représente une « particule » au sens habituel. Le bon point de vue est plutôt le suivant :

Une singularité **dans un domaine de type « métrique oscillante »** dont les caractéristiques de la fonction  $f (= a^{(n-2)/4})$  correspondent à celles d'un électron pourra être apparentée à la notion standard d'électron. Si les caractéristiques de la fonction  $f$  correspondent à celles d'un photon, la singularité **dans ce domaine** sera apparentée à la notion standard de photon. Lorsque la singularité sera dans un domaine de type « potentiel » (pour lequel  $f = C^{te}$ ) elle sera « indécidable », etc.

Ce point de vue est fondamentalement différent de tous ceux des théories quantiques (ou non quantiques) standard : les caractéristiques (masse, charge électrique, spin, etc.) seront celles **de la métrique oscillante** du voisinage dans lequel se trouve la singularité. Ces considérations ont pour conséquence le fait que la « dynamique des particules dans un potentiel » sera complètement gérée par la métrique oscillante. L'étude de celle-ci sera la partie « déterministe » de la description des phénomènes physiques considérés puisque les équations différentielles déduites n'auront qu'une solution pour des « conditions aux limites » bien précisées. La partie « aléatoire » sera celle liée à l'ensemble  $\mathcal{S}$  des singularités élémentaires dont la probabilité de présence dans un domaine donnera, par définition, celle de la « position » des particules.

Pour clarifier ce que l'on vient de dire on reprend ces mêmes notions dans le cadre d'une expérience simple exprimée dans le langage classique de la physique :

Des particules lancées avec un vecteur vitesse connu pénètrent dans une boîte dans laquelle on a fait le vide et où existe éventuellement un potentiel. Les particules laissent des « impacts » sur un écran situé sur la face opposée à l'orifice d'entrée des particules. Cette expérience se place donc dans un domaine  $\mathcal{D}$  d'espace-temps où, en dehors du domaine intérieur à la boîte (noté  $\mathcal{D}_B$ ) pendant le « temps » de l'expérience, la métrique sera supposée être celle d'un potentiel neutre  $g_0$  (en dimension  $n$  avec deux signes moins dans la signature). Le domaine  $(\mathcal{D} - \mathcal{D}_B, g_0)$  pourra être considéré comme le domaine d'un observateur qui fait des mesures liées à l'expérience (mesure de la position des impacts sur l'écran par exemple). Ces mesures seront nécessairement faites relativement à la métrique  $g_0$  de l'observateur. Par exemple, la mesure de la position des impacts sur l'écran sera faite par « transparence » sur la face extérieure de l'écran où la métrique est effectivement  $g_0$ , ou bien, après l'expérience, en démontant la boîte et là encore la mesure de la trace des impacts sera faite avec la métrique  $g_0$  (en fait c'est surtout  $g_0|_{\Theta}$  qui est utilisée, autrement dit la métrique de Minkovski). Il est impossible qu'un observateur fasse une quelconque mesure à l'intérieur de la boîte pendant l'expérience car l'introduction d'un « objet physique » dans celle-ci perturberait nécessairement complètement l'expérience. Avec le « regard » que l'on présente ici, ceci veut simplement dire que la présence d'un autre objet : « métrique oscillante avec singularités, par exemple » dans la boîte, change complètement les équations et l'étude devient alors celle d'un autre domaine de l'espace-temps.

Le domaine  $(\mathcal{D}_B, g)$  représentant l'intérieur de la boîte pendant le temps de l'expérience sera donc de type « particules dans un potentiel ». La fonction  $a := f^{(n-2)/4}$  de la métrique conforme à  $g_{\mathcal{P}}$  correspondant à la métrique oscillante de ce type de « particules » vérifiera une équation différentielle linéaire (exprimée à partir de la métrique  $g_0$ ). La précision suffisante sur la solution viendra des conditions « aux limites » du domaine  $\mathcal{D}_B$ . Une des conditions est, bien sûr, celle qui précise que les particules pénètrent dans la boîte avec un vecteur vitesse donné. Pour ceci il

faut en fait introduire un troisième domaine  $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D} - \mathcal{D}_B$  où est défini rigoureusement un type « particules dans un potentiel neutre se déplaçant à une vitesse  $v$  dans une direction donnée » qui sera un cas particulier du type « particules dans un potentiel ». Ce type particulier sera important car il servira de « condition initiale » pour de nombreuses expériences. Les autres « conditions aux limites » traduiront le fait qu'il n'y a pas de réflexions des particules sur le bord intérieur de la boîte, etc. Les problèmes posés par les conditions aux limites seront les mêmes que ceux qui se posent en physique quantique classique avec la fonction d'état. La métrique oscillante sera donc suffisamment déterminée. Par contre, comme on l'a déjà dit, les « singularités » ne seront qu'« équiprobablement réparties » relativement à la métrique  $g$ .

Pour visualiser l'expérience, le lecteur peut imaginer que l'intérieur de la boîte est « élastique » (ainsi que l'écran que l'on considérera ayant une épaisseur). Pendant la préparation de l'expérience la métrique est partout  $g_0$ . Pendant l'expérience, lors de l'impact des particules sur l'écran, la métrique effective est la métrique oscillante  $g$  qui est «  $g_0$  perturbée par le changement de métrique conforme, c'est à dire  $fg_0$  ». L'écran est « déformé » relativement à  $g_0$ . La position des singularités (et donc des impacts sur l'écran) est équiprobable sur l'écran déformé (la métrique effective est  $g$ ). Lors de la mesure, après l'expérience, la métrique est  $g_0$  (l'écran a sa forme initiale), la position des impacts n'est plus équiprobable sur l'écran et l'on voit bien que la loi de probabilité sur la position des impacts (pour  $g_0$ ) est complètement déterminée par la « déformation » de l'espace-temps à l'intérieur de la boîte lors des impacts, c'est à dire par la métrique oscillante  $g$ , et on devine le lien étroit entre « l'élément de volume » pour  $g$  et la « densité de probabilité de présence » des singularités dans l'élément de volume pour  $g_0$ .

En fait, tout ce que l'on vient de décrire se passe dans un domaine de dimension  $n > 5$  que l'on peut considérer être  $\Theta \times W$  où  $\Theta$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^4$  et  $W$  une variété compacte, et les métriques considérées ont une signature  $(-, +, +, +, -, +, \dots, +)$ .

$\Theta$  peut être vu comme l'espace-temps standard et  $W$  comme les « petites dimensions » supplémentaires (dont une de genre temps). La notion même de « boîte » dans un tel espace demande à être définie, mais ceci ne pose pas de problèmes puisque il suffit de la définir classiquement dans  $\Theta$  puis de faire le produit cartésien avec  $W$ . La boîte est ici considérée uniquement comme un bord de domaine. Tous les tenseurs et les opérateurs différentiels qui interviennent dans la description de cette expérience dépendent, entre autre, des « variables des petites dimensions supplémentaires ». Ceci est fondamental et c'est ce qui distingue, comme on l'a déjà dit, la description des phénomènes quantiques de ceux décrits dans le premier chapitre.

La classification des métriques oscillantes (qui devient donc l'équivalent de la classification des particules en physique classique) se ramènera à des choix de termes particuliers dans la décomposition spectrale de la fonction  $a$  relative au d'Alembertien de la variété compacte  $(W, g_W)$ . Les notions habituellement appelées « interaction » (entre particules ou (et) avec des potentiels) gérées classiquement par des choix de lagrangiens-hamiltoniens puis par une procédure de « quantification », seront gérées ici uniquement par l'axiomatique très simple que l'on a déjà précisée (domaine à courbure scalaire constante conforme à un potentiel) et par le choix des termes de la décomposition spectrale. Aucune loi, aucun principe ne sera ajouté. L'étude de la décomposition spectrale d'une fonction définie sur  $(W, g_W)$  est complexe et est évidemment complètement liée à la précision de la donnée de  $(W, g_W)$ . Nous présenterons ici essentiellement l'étude des interactions de particules avec un potentiel (autrement dit, les résultats donnés par



l'approximation linéaire), celle-ci incluant la notion de « spin ». La description des phénomènes quantiques plus complexes (abordée actuellement par la théorie quantique des champs) sera succinctement présentée dans la section 2.21.

Passons maintenant aux énoncés précis des définitions, des résultats obtenus et de leurs démonstrations.

## 2.2 Le « type géométrique » fondamental

Le type géométrique que l'on va définir maintenant va permettre l'étude complète de ce que l'on appelle classiquement des « particules dans un potentiel ». La seule application de sa définition va suffire pour retrouver les résultats standard de la physique quantique sur le sujet. Nous n'irons pas plus loin pour cette étude dans ce papier, mais ce « domaine géométrique » permettra aussi d'aborder les phénomènes traités actuellement par la théorie quantique des champs (que nous noterons « T.Q.C » par la suite) et ceci avec une très grande simplicité de l'axiomatique. Précisons pour le lecteur familier avec la T.Q.C, que les définitions qui vont suivre sont plutôt apparentées à la notion de « champs » de la T.Q.C. Les « quanta » de ces champs seront apparentés aux « singularités » définies dans la section 2.13.

Les potentiels que l'on va considérer sont ceux que l'on a définis en (1.4.2). Ils seront à courbure scalaire constante. La métrique pseudo-riemannienne  $g$  d'un domaine  $\mathcal{D}$  qui va caractériser le « type géométrique » fondamental va être définie par deux propriétés :

1. la métrique  $g$  sera conforme à une métrique de potentiel  $g_{\mathcal{P}}$ , autrement dit elle sera de la forme  $fg_{\mathcal{P}}$  où  $f$  est une fonction réelle positive ou nulle.
2. La courbure scalaire  $S_g$  sera conservée égale à  $S_{g_0}$  (donc constante).

On rappelle qu'une transformation conforme d'une métrique pseudo-riemannienne  $g$  est une transformation qui ne privilégie aucune direction (que ce soit d'espace ou de temps), elle consiste à multiplier, en chaque point  $x$  de  $\mathcal{M}$ , la forme quadratique  $g_x$  de l'espace tangent  $T_x(\mathcal{M})$  par un réel  $f(x) \geq 0$ .

Il s'avère simplificateur, lors d'un changement de métrique conforme  $fg_{\mathcal{P}}$ , d'écrire  $f$  sous la forme  $|a|^{4/n-2}$  (où  $n = \dim \mathcal{M}$ ) car l'équation différentielle en «  $a$  », déduite des propriétés précédentes, a une forme plus simple que celle écrite en «  $f$  ».

La définition précise du domaine géométrique qui, pour nous, va décrire tous les « phénomènes quantiques » est donc la suivante.

**Définition 19.** *Un domaine à courbure scalaire constante, conforme à un potentiel est un domaine  $\mathcal{D}$  de  $\mathcal{M}$  qui vérifie les deux propriétés suivantes :*

1. *Quel que soit  $x \in \mathcal{D}$  il existe une carte  $(\mathcal{V}, \varphi)$  en  $x$  du  $g$ -atlas d'observation, il existe une fonction régulière  $a : \varphi(\mathcal{V}) = \mathcal{C} = \Theta \times S^1 \times W \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\varphi : (\mathcal{V}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{C}, |a|^{4/n-2} g_{\mathcal{P}})$  soit une isométrie.  
Ici  $g_{\mathcal{P}}$  est une métrique représentant un potentiel.*
2. *La courbure scalaire  $S_{g_{\mathcal{M}}}$  est égale à  $S_{g_{\mathcal{P}}}$  (et est donc une constante égale à  $S_{g_0}$  pour les potentiels considérés).*

La condition 2. de cette définition est en fait une condition de **normalisation** de la fonction  $a$  du changement de métrique conforme. Multiplier  $a$  par une constante positive  $\lambda$  fait que la courbure scalaire  $S_{g'}$ , où  $g' = |a|^{4/n-2}g_{\mathcal{P}}$ , est multipliée par  $\lambda^{-4/n-2}$ . On aurait pu choisir une autre forme de normalisation qui laisse  $S_{g'}$  constante mais différente de  $S_{g_{\mathcal{P}}}$ . La condition 2. m'a paru le choix le plus simple. L'importance du choix de la normalisation apparaîtra dans la section 2.14.

*Remarque 16.* Cette remarque est à mettre en parallèle avec la remarque 5 du premier chapitre. On peut définir une classe plus large de domaines « à courbure scalaire constante conforme à un potentiel » lorsque la cellule type  $\mathcal{C}$  de la définition 19 est de la forme  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1 \times V_1 \times V_2$  et les potentiels sont définis par une métrique produit  $g_{\mathcal{P}} = g'_{\mathcal{P}} \times g_{V_2}$  où  $g'_{\mathcal{P}}$  est une métrique de potentiel sur  $\mathcal{C}' = \Theta \times S^1 \times V_1$ , ceci en considérant des transformations conformes de  $g'_{\mathcal{P}}$  et non de  $g_{\mathcal{P}}$ . Précisément, la condition 1. de la définition 19 est remplacée par : Quel que soit  $x \in \mathcal{D}$  il existe une carte  $(\mathcal{V}, \varphi)$  en  $x$  du  $g$ -atlas d'observation, il existe une fonction régulière  $a : \mathcal{C}' = \Theta \times S^1 \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$  telles que  $\varphi : (\mathcal{V}, g_{\mathcal{M}}) \rightarrow (\mathcal{C}, (|a|^{4/n-2}g'_{\mathcal{P}}) \times g_{V_2})$  soit une isométrie. Remarquons qu'avec cette définition, certaines « directions d'espace » sont privilégiées. Bien sûr, tous les résultats que l'on va obtenir à partir de la définition 19 pourront s'appliquer à cette nouvelle définition en considérant que la variété est de dimension  $(n - \dim V_2)$ . Le fait que  $|a|^{4/n-2}g'_{\mathcal{P}} \times g_{V_2}$  soit une métrique produit est ensuite simple à gérer. Cependant, la courbure scalaire  $S_{g_{\mathcal{P}}}$  est différente de  $S_{g'_{\mathcal{P}}}$  si  $S_{V_2}$  est  $\neq 0$ , (puisque  $S_{g_{\mathcal{P}}} = S_{g'_{\mathcal{P}}} + S_{V_2}$ ), et ceci pourra avoir de l'importance car nous verrons par la suite que la notion de « masse » sera influencée par la courbure scalaire (def 24). Étendre la définition 19 comme on vient de le présenter permettra donc plus de possibilités liées à la notion de masse.

### 2.3 L'équation fondamentale d'un domaine « à courbure scalaire constante, conforme à un potentiel »

On sait que la loi de transformation de la courbure scalaire, lors d'un changement de métrique conforme  $g' = |a|^{4/n-2}g$ , est donnée par l'équation de Yamabe :

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \square_g a + S_g a = S_{g'} |a|^{4/n-2} a \quad (2.1)$$

où  $S_g$  (resp  $S_{g'}$ ) désigne la courbure scalaire relative à  $g$  (resp  $g'$ ) et  $\square_g := -\nabla_g^i \nabla_{g_i}$  est le d'alembertien (des géomètres) relatif à  $g$ .

Ici la fonction  $a$  peut changer de signe. Sur l'ensemble où  $a$  s'annule la courbure relative à  $g'$  n'est pas définie. Sur cet ensemble l'équation 2.1 se réduit à  $0 = 0$ .

Compte tenu de la définition 19, l'équation fondamentale vérifiée par la fonction  $a$ , pour un domaine « à courbure scalaire constante, conforme à un potentiel », est donc la suivante :

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \square_{g_{\mathcal{P}}} a + S_{g_{\mathcal{P}}} a = S_{g_{\mathcal{P}}} |a|^{4/n-2} a \quad (2.2)$$

où  $S_{g_{\mathcal{P}}}$  est en fait  $S_{g_0}$  qui est constante compte tenu des potentiels considérés.

Lorsque  $S_{g_P} \neq 0$ , cette équation est non linéaire, ce qui rend son utilisation très délicate, cependant nous allons voir que dans de nombreux cas correspondant à des expériences classiques, la fonction  $a$  sera  $\ll 1$  (relativement à la normalisation donnée dans la définition 19-2.). L'équation 2.2 pourra alors être « approchée » par l'équation où le second membre est nul. Ceci est précisé dans la section suivante.

## 2.4 L'approximation linéaire. Les domaines de type « métrique oscillante dans un potentiel »

Nous nous intéressons maintenant aux domaines « à courbure scalaire constante, conforme à un potentiel » pour lesquels les solutions de l'équation fondamentale 2.2 sont « très proches » des solutions de l'équation **linéaire** associée :

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \square_{g_P} a + S_{g_0} a = 0$$

ceci pour des conditions aux limites du domaine précisées (fondamentales pour la validité de cette approximation). Nous verrons plus loin (section 2.14) que cette approximation correspond aux expériences pour lesquelles, dans le langage classique, on néglige l'interaction des particules entre elles (mais pas avec le potentiel bien sûr). Le fait que la fonction  $a$  reste  $\ll 1$  sera la traduction d'une « faible densité de particules » dans l'expérience considérée. La non linéarité de l'équation 2.2 fait que, lorsque  $a \ll 1$ , le terme  $S_{g_P} |a|^{4/n-2}$  peut être « absorbé » par le terme  $S_{g_P}$  du premier membre de l'équation en ne le modifiant que très peu. Bien sûr, ce simple fait n'est pas suffisant mathématiquement pour que les solutions de l'équation linéaire soient « proches » de celles de l'équation 2.2, les choses doivent être précisées. (L'annexe 3.5 présente un exemple très simple d'approximation de solutions d'une équation non linéaire par celles d'une équation linéaire associée, dans l'esprit de ce que l'on vient de présenter, qui peut aider à comprendre le processus).

Nous donnons la définition suivante.

*Définition 20. Un domaine de type **métrique oscillante dans un potentiel** est un domaine « à courbure scalaire constante, conforme à un potentiel » pour lequel la condition 2. de la définition 19 est remplacée par le fait que la fonction  $a$  vérifie :*

$$\square_{g_P} a + S a = 0 \tag{2.3}$$

où l'on a posé  $S = \frac{4(n-1)}{n-2} S_{g_0}$

**L'équation 2.3 devient donc l'équation fondamentale d'un domaine de type « métrique oscillante dans un potentiel ».**

la terminologie « métrique oscillante » est justifiée par le fait que dans la plupart des cas, comme nous le verrons plus loin, la simple utilisation de la définition 20 impose à la fonction  $a : \mathcal{C} = \Theta \times S^1 \times W \rightarrow \mathbb{R}$  d'avoir de « fortes oscillations en  $t \in \mathbb{R}$  » et éventuellement en

$u \in S^1$ . La fréquence des oscillations en «  $t \in \mathbb{R}$  » sera liée à la notion de « masse », celle des oscillations en  $u \in S^1$  à la notion de « charge électrique » (defs 22 et 24).

La partie essentielle de ce deuxième chapitre a pour objectif le fait de retrouver les résultats de la physique quantique classique qui décrivent les expériences standard (diffraction, fentes de Young, influence des potentiels, expérience de Stern-Gerlach, intrication quantique, etc.). Pour ces résultats, les interactions des particules entre elles sont négligées (on peut les considérer « une par une » hormis pour les phénomènes d'« intrication quantique ») et c'est donc l'équation 2.3 que nous allons utiliser.

*Remarque 17.* L'équation fondamentale 2.3 peut être considérée comme l'approximation linéaire d'une équation plus générale que 2.2. Il n'est à priori pas nécessaire dans la définition 19 de supposer que le changement de métrique conforme conserve la courbure scalaire de  $g_{\mathcal{P}}$  (ni même la laisse constante). Il suffit, pour la validité de 2.3, de borner  $S_{g'}$ , où  $g' = |a|^{4/n-2} g_{\mathcal{P}}$ , ceci pour normaliser la fonction  $a$ . Le fait de conserver la constance de la courbure scalaire n'aura d'intérêt que pour faire le parallèle avec certaines études présentées en T.Q.C, mais celles-ci ne seront pas abordées ici.

## 2.5 Classification des métriques oscillantes

Comme on l'a déjà dit, « un domaine à courbure scalaire constante, conforme à un potentiel » est caractérisé par deux « objets » :

1. Le potentiel donné par :  $g_{\mathcal{P}} = g_0 + h$  (cf. 1.4.2).
2. La fonction  $a : \mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W \rightarrow \mathbb{R}$ .

Quel que soit  $x \in \Theta$ , la fonction  $a_x(\cdot) : \mathcal{C} = S^1(\delta) \times W \rightarrow \mathbb{R}$ , donnée par  $a_x(u, v) := a(x, u, v)$ , est définie sur la variété pseudo-riemannienne **compacte**  $S^1(\delta) \times W$ . Elle admet donc une décomposition spectrale relative au d'alembertien  $\square_{g_0|_{S^1(\delta) \times W}}$ . En fait, compte tenu de la signature  $(-, +, +, \dots, +)$  de  $g_0|_{S^1(\delta) \times W}$ , il sera préférable de considérer indépendamment les décompositions spectrales de  $a_{(x,u)}(\cdot) : W \rightarrow \mathbb{R}$  et de  $a_{(x,w)}(\cdot) : S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  relatives aux **laplaciens riemanniens** de  $(W, g|_W)$  et de  $(S^1(\delta), g_0|_{S^1(\delta)})$ . Ceci sera précisé dans le paragraphe suivant.

Le principe de décomposition que l'on va utiliser est le même que celui qui consiste à décomposer des « sons » périodiques en « sons purs », ce qui se traduit mathématiquement par la décomposition en série de Fourier des fonctions périodiques définies sur  $\mathbb{R}$ . Les fonctions périodiques définies sur  $\mathbb{R}$  s'identifient aux fonctions définies sur un cercle  $S^1$  et celui-ci est une variété compacte. La « compacité » est fondamentale pour la validité d'une théorie spectrale « discrète ». L'obtention de grandeurs « discrètes » dans la théorie qui va suivre, qui justifie le terme « quantique », va venir de la compacité de la variété  $S^1(\delta) \times W$  dans la cellule type. Bien entendu, la décomposition spectrale que l'on va utiliser est bien plus complexe que celle où la variété est réduite à un cercle. La classification des métriques oscillantes que l'on va déduire de la décomposition spectrale s'apparente à la classification des « particules » des théories physiques standard.

On commence par rappeler quelques résultats de théorie spectrale qui concernent les variétés riemanniennes compactes. Pour nous, ces résultats concerneront les variétés  $(W, g_0|_W)$  et  $(S^1(\delta), g_0|_{S^1(\delta)})$ .

### 2.5.1 Rappels de quelques résultats de théorie spectrale sur les variétés riemanniennes compactes

**Théorème spectral :** on considère une variété **riemannienne compacte**  $(V, g)$  et l'opérateur laplacien (des géomètres) associé :  $\Delta := -\nabla^i \nabla_i$ .

1. Les valeurs propres du laplacien  $\Delta$  forment une suite croissante de réels positifs qui tend vers  $+\infty$  :  

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$$
2. Pour chaque valeur propre  $\lambda_i$ , l'espace propre correspondant  $E_{\lambda_i}$  est de dimension finie et, quels que soient  $i \neq j$ ,  $E_{\lambda_i}$  et  $E_{\lambda_j}$  sont orthogonaux pour le produit scalaire standard de  $L^2(V, g)$ .  
 $(\dim E_0 = 1, E_0 \text{ étant l'ensemble des fonctions constantes sur } V)$
3. **La somme algébrique des espaces propres  $E_{\lambda_i}$  est dense dans  $C^\infty(V)$  muni de la topologie uniforme. En particulier l'espace de Hilbert  $L^2(V, g)$  admet une base hilbertienne de fonctions propres.**

La proposition suivante, simple à montrer, concerne le « d'alembertien » sur une variété pseudo-riemannienne produit.

*Proposition 7. On considère  $k$  variétés riemanniennes compactes  $(V_i, g_i)$ .*

*Sur la variété produit  $V = V_1 \times \dots \times V_k$  on définit le tenseur **pseudo-riemannien** :*

$$g = (-g_1) \times (-g_2) \times \dots \times (-g_p) \times (g_{p+1}) \times \dots \times (g_k).$$

*Le d'alembertien associé est défini par  $\square = -\nabla^i \nabla_i$ . (Si  $p = 0$ ,  $\square = \Delta$ ).*

*Soient  $E_{\lambda_1}, \dots, E_{\lambda_k}$  des espaces propres respectivement associés aux laplaciens des  $(V_1, g_1), \dots, (V_k, g_k)$ .*

*Alors l'ensemble  $F$  constitué des « sommes finies de produits »  $f_1 f_2 \dots f_k$ , où les  $f_i \in E_{\lambda_i}$ , est un sous-espace vectoriel de l'espace propre  $E_\lambda$  relatif au d'alembertien  $\square$  de la variété pseudo-riemannienne  $(V, g)$  associé à la valeur propre  $\lambda = -\lambda_1 \dots - \lambda_p + \lambda_{p+1} + \dots + \lambda_k$ .*

*(Les fonctions  $f_i$  sont ici considérées définies de  $V$  dans  $\mathbb{R}$ , l'abus de notation utilisé consiste à confondre  $f_i : V_i \rightarrow \mathbb{R}$  et  $f_i \circ p_i : V \rightarrow \mathbb{R}$  (où  $p_i : V \rightarrow V_i$  est la projection canonique), cet abus sera fréquent par la suite).*

Autrement dit,  $F$  s'identifie canoniquement au produit tensoriel  $E_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes E_{\lambda_k}$  que l'on considérera comme un sous-espace vectoriel de l'espace propre  $E_\lambda$ .

*Remarque 18.* On peut montrer que si  $\lambda$  est une valeur propre du d'alembertien de  $(V, g)$  et s'il existe un **unique**  $k$ -uplet  $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  de valeurs propres des  $(V_i, g_i)$  tel que  $\lambda = -\lambda_1 \dots - \lambda_p + \lambda_{p+1} + \dots + \lambda_k$ , alors l'espace propre  $E_\lambda$  est exactement  $E_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes E_{\lambda_k}$ . On prendra garde d'autre part au fait que, lorsque la variété pseudo-riemannienne  $(V, g)$  n'est pas riemannienne, il peut exister des espaces propres relatifs au d'alembertien qui sont de dimension infinie.

La variété  $V$  que l'on considère ici est  $S^1(\delta) \times W$  et la métrique pseudo-riemannienne  $g_0|_V$  est la métrique produit  $(g_0|_{S^1(\delta)} \times g|_W)$  de signature  $(-, +, \dots, +)$ . La fonction  $a : \mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W \rightarrow \mathbb{R}$ , qui précise la métrique oscillante, vérifie donc les propriétés suivantes d'après le théorème spectral :

1. Quel que soit  $(x, u) \in \Theta \times S^1(\delta)$ , la fonction  $a_{(x,u)}(\cdot) : W \rightarrow \mathbb{R}$  admet la décomposition spectrale  $a_{(x,u)}(\cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_{i(x,u)} \alpha_i(\cdot)$  où  $(\alpha_i)$  est une base hilbertienne orthonormée de fonctions propres de  $(W, g)$ .
2. Quel que soit  $i \in \mathbb{N}^*$ , quel que soit  $x \in \Theta$ , la fonction  $\varphi_{i,x}(\cdot) : S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  admet la décomposition spectrale (décomposition de Fourier) :  

$$\varphi_{i,x}(u) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{1,i,j(x)} \cos(2\pi ju/\delta) + \zeta_{2,i,j(x)} \sin(2\pi ju/\delta).$$

**Classer les métriques oscillantes va consister à ne prendre que certains termes de la décomposition spectrale de la fonction  $a$ .** Ceci va permettre, entre autre, de définir des constantes caractéristiques pour chaque métrique oscillante élémentaire choisie. Ces constantes vont donner les notions de « masse », de « charge électrique », de « spin », etc., associées à la métrique oscillante élémentaire considérée, ce qui correspondra ensuite, lorsque l'on aura précisé la notion de « singularités » (section 2.13), aux notions standard liées aux « particules ».

Le choix de la définition que l'on va présenter maintenant est essentiellement guidé par le fait que l'on souhaite retrouver les « classifications standard » sur les particules, il tient compte du fait que, vue la signature de  $g$ ,  $S^1(\delta)$  ne joue pas le même rôle que  $W$ .

### 2.5.2 Les métriques oscillantes élémentaires

Les métriques oscillantes **élémentaires** peuvent être vues comme les « sons purs » dans la décomposition d'un « son périodique ».

On considère un espace propre du d'alembertien  $\square_{g_0|_{S^1(\delta) \times W}}$  de la forme  $E_{\lambda,\mu} := E_{S^1(\delta)}(\lambda) \otimes E_W(\mu)$ .

**Définition 21.** Un domaine de type **métrique oscillante élémentaire dans un potentiel associée à  $E_{\lambda,\mu}$**  est un domaine de type métrique oscillante dans un potentiel (définition 20) pour lequel la fonction  $a : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie : quel que soit  $x \in \Theta$ ,

$$a_{(x)}(\cdot) \in E_{\lambda,\mu}$$

.

Si  $\lambda > 0$ , l'espace propre  $E_{S^1(\delta)}(\lambda)$  est de dimension 2.

Il est de dimension 1 lorsque  $\lambda = 0$ .

On choisit souvent les bases naturelles :

1.  $(\alpha_1, \alpha_2)$  si  $\lambda > 0$ , où  $\alpha_1(u) := \cos(\sqrt{\lambda} u)$  et  $\alpha_2(u) := \sin(\sqrt{\lambda} u)$ .
2.  $(\alpha_1 = 1)$  lorsque  $\lambda = 0$ .

(On identifiera ensuite  $E_{S^1(\delta)}(\lambda)$  à  $\mathbb{C}$  si  $\lambda \neq 0$  et  $E_{S^1(\delta)}(0)$  à  $\mathbb{R}$ ).

Si l'on choisit une base  $(\beta_1, \dots, \beta_k)$  de  $E_W(\mu)$  ( $L_W^2$ -orthonormée, par exemple), la fonction  $a$  vérifie alors :

quel que soit  $x \in \Theta$ ,

$$a_x(\cdot) = \sum_{i=1}^k (\varphi_{1,i(x)} \alpha_1 + \varphi_{2,i(x)} \alpha_2) \beta_i \quad (2.4)$$

Lorsque les bases des espaces propres sont précisées, la fonction  $a$  est entièrement déterminée par les  $2k$  fonctions  $\varphi_{1,i}$  et  $\varphi_{2,i}$  ( $k$  fonctions réelles si  $\lambda = 0$ ).

Nous verrons dans la section 2.7 que, par des principes naturels d'approximations, nous pourrions limiter le nombre des fonctions  $\varphi_{1,i}$  et  $\varphi_{2,i}$  qui déterminent la fonction  $a$  dans la décomposition 2.4 et ainsi affiner la classification des métriques oscillantes élémentaires. Avant cela nous présentons les premières caractéristiques importantes des métriques oscillantes élémentaires.

## 2.6 Les constantes associées à une métrique oscillante élémentaire

On introduit ici en particulier la notion de **charge électrique** et de **masse** d'une métrique oscillante élémentaire. Bien sûr, la terminologie est choisie pour que ces notions correspondent ensuite exactement à celles de la physique standard.

D'après la définition 21 la fonction  $a : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  qui caractérise la métrique oscillante élémentaire associée à  $E_{\lambda,\mu}$  vérifie :

$$\forall x \in \Theta \quad a_x(\cdot) \in E_{\lambda,\mu} := E_{S^1(\delta)}(\lambda) \otimes E_W(\mu)$$

**Les constantes importantes que l'on va définir ne sont autres que celles construites à partir des valeurs propres  $\lambda$  et  $\mu$  de  $E_{\lambda,\mu}$ .** Elles seront donc invariantes par changement de cartes de l'atlas d'observation qui proviennent des transformations de Lorentz, car celles-ci « laissent fixe », par définition, la variété compacte  $S^1(\delta) \times W$  donc l'espace propre  $E_{\lambda,\mu}$ .

### La charge électrique absolue

Une base naturelle de l'espace propre  $E_{S^1(\delta)}(\lambda)$ , que l'on a utilisée dans la décomposition 2.5 de  $a_x(\cdot)$ , est donnée par :

$$(\alpha_1, \alpha_2) \text{ si } \lambda > 0 \text{ (où } \alpha_1(u) = \cos(\sqrt{\lambda}u) \text{ et } \alpha_2(u) = \sin(\sqrt{\lambda}u)) \\ \text{et par } (\alpha_1 = 1) \text{ lorsque } \lambda = 0.$$

**Définition 22.** *La fréquence de charge électrique de la métrique oscillante élémentaire associée à  $E_{\lambda,\mu}$ , est la constante positive ou nulle  $Q^+ := \sqrt{\lambda}$ .*

Pour retrouver la notion standard de « charge électrique » exprimée dans les unités S.I, on donne la définition suivante :

**Définition 23.** *La charge électrique absolue de la métrique oscillante élémentaire associée à  $E_{\lambda,\mu}$  est la constante  $q^+ := \hbar Q^+$  où  $\hbar$  est la constante de Planck.*

La définition de la charge électrique relative (positive ou négative) sera présentée plus loin dans un cadre plus restrictif de métriques oscillantes (def. 31).

La constante de Planck n'apparaît ici que comme un facteur qui ramène une fréquence (exprimée en unité géométrique) à une unité S.I de charge électrique.

À ce sujet on rappelle que, en « unités géométriques », une masse est une « longueur », une charge électrique est une « longueur », la constante de Planck est « le carré d'une longueur », une fréquence est l'« inverse d'une longueur », etc.

### La masse

La justification de la terminologie « masse » (ainsi que celle de « charge électrique ») apparaîtra clairement plus loin lors de la traduction de l'équation fondamentale 2.3 sous la forme d'équations de Klein-Gordon puis de Schrödinger ( thms. 3 et 4). La définition donnée ici est spécifique aux métriques oscillantes élémentaires, une extension à un cadre plus général pourra être envisagée dans le cadre d'études plus complexes mais ne sera que très succinctement abordée dans ce papier (cf.section 2.21).

**Définition 24.** *La fréquence de masse de la métrique oscillante élémentaire associée à  $E_{\lambda,\mu}$ , est la constante positive ou nulle  $M$  qui vérifie :*

$$M^2 = S + \mu - \lambda$$

où  $S := \frac{n-2}{4(n-1)}S_{g_0}$ ,  $S_{g_0}$  étant la courbure scalaire constante de la métrique  $g_0$  (et des métriques  $g_P$  associées aux potentiels).

La fréquence de masse n'est évidemment définie ici que dans le cas où  $S + \mu - \lambda$  est positif ou nul (les cas pour lesquels  $S + \mu - \lambda$  est négatif seront étudiés lorsque la notion de « durée de vie » interviendra, mais ce sujet ne sera que succinctement abordé dans ce papier (cf. section 2.21).

Pour retrouver la notion de « masse » exprimée dans les unités S.I, on donne la définition suivante.

**Définition 25.** *La masse de la métrique oscillante élémentaire associée à  $E_{\lambda,\mu}$  est la constante  $m := \hbar c^{-1} M$  où  $c$  est la célérité de la lumière.*

On remarquera que la courbure scalaire  $S_{g_0}$  intervient dans la définition de la masse en se rajoutant à la valeur propre  $\mu - \lambda$ , ceci pour retrouver, comme on l'a déjà dit, la notion standard de masse de la physique classique. Mais nous verrons (section 2.17) que ce fait peut être lié à la notion de « champ de Higgs », (la courbure scalaire, lorsqu'elle est  $> 0$  « donne » de la masse à des métriques oscillantes pour lesquelles  $\mu - \lambda$  est  $< 0$ ).

**Remarque 19.** De par sa définition, la fréquence de charge électrique est un multiple entier de  $\delta^{-1}$  où  $\delta$  est le rayon du cercle  $S^1(\delta)$ . La charge électrique absolue  $q^+$  est donc un multiple entier d'une charge élémentaire. Par contre, la masse d'une telle métrique oscillante possède un ensemble de valeurs possibles bien plus complexe. (Bien que celui-ci soit discret pour une variété  $(S^1(\delta) \times W, g_0|_{S^1(\delta) \times W})$  fixée).



Lorsque la variété compacte  $W$  est décomposée sous la forme d'un produit  $V_1 \times \cdots \times V_k$ , les valeurs propres des espaces propres  $E_{V_k}(\mu_k)$  sont des caractéristiques de la métrique oscillante qui peuvent s'avérer importantes. Ce sera le cas pour la décomposition  $W = S^3(\rho) \times V$  pour laquelle les espaces propres  $E_{S^3(\rho)}(\gamma)$  donneront la classification en terme de « spin » des métriques oscillantes élémentaires. Ceci sera détaillé dans la section 2.15.

## 2.7 Affinement de la classification des métriques oscillantes. Les métriques oscillantes élémentaires d'ordre 1 et 2 dans un potentiel

La précision des résultats obtenus lors de l'étude des métriques oscillantes élémentaires est, bien sûr, liée à la précision donnée sur la variété riemannienne compacte  $(W, g_W)$ . Le choix de celle-ci se précise petit à petit guidé par la volonté de décrire le plus finement possible les résultats expérimentaux. Pour pouvoir écrire des théorèmes suffisamment précis il est nécessaire de savoir « négliger » la « partie » encore inconnue de la variété  $(W, g_W)$ .

Pour retrouver les résultats de la physique quantique standard qui ne tiennent pas compte de la notion de spin, nous « négligerons » (avec une définition précise (def. 26)) les « effets quantiques » liés à la variété « entière »  $(W, g_W)$  et seuls les « effets quantiques » liés à  $(S^1(\delta), g_{0_{S^1}})$  seront considérés.

Les métriques oscillantes élémentaires correspondant à cette situation seront dites « **d'ordre 1** » (def. 27-1.) et nous verrons qu'il suffira alors d'utiliser seulement **deux** fonctions réelles (donc une fonction complexe) pour déterminer complètement l'équation que vérifie la fonction  $a$ .

Pour retrouver les résultats qui tiennent compte de la notion de spin, nous considérerons que la variété  $(W, g_W)$  se décompose sous la forme :

$$(W, g_W) = (S^3(\rho) \times V, g_{0_{S^3}} \times g_V)$$

où  $(S^3(\rho), g_{0_{S^3}})$  est la sphère riemannienne standard de dimension 3 et de rayon  $\rho$ . Une description précise de cette situation pourra être faite à condition de « négliger » les effets quantiques liés à  $(V, g_V)$  et de ne considérer que ceux liés à  $(S^1(\delta) \times S^3(\rho), g_{0_{S^1 \times S^3}})$ .

Les métriques oscillantes élémentaires correspondant à cette situation seront dites « **d'ordre 2** » (def. 27-2.). Le nombre de fonctions réelles qui suffira à la détermination de l'équation vérifiée par la fonction  $a$  sera ici limité par la dimension des espaces propres du laplacien sur la sphère  $(S^3(\rho), g_{0_{S^3}})$ .

Une description de plus en plus « fine » des effets quantiques pourra être poursuivie en continuant de préciser les propriétés de la variété  $(W, g_W)$ . Cette précision ne s'obtiendra pas nécessairement en décomposant la variété  $V$  sous forme de produit, mais si cela est le cas, nous définirons les métriques oscillantes élémentaires d'ordre  $k > 2$ .

La définition 26 qui va suivre permet de préciser ce que l'on vient de présenter, c'est à dire la manière dont on « néglige » certains « effets quantiques » liés à la variété  $(W, g_W)$ . Elle concerne les métriques représentant les potentiels et elle s'applique dans le cadre général pour lequel

la variété compacte  $(W, g_W)$  se décompose sous la forme  $(V_1, g_{V_1}) \times (V_2, g_{V_2})$ . Les métriques oscillantes d'ordre 1 dont on vient de parler (précisées dans la définition 27-1.) sont celles pour lesquelles  $V_1$  est réduite à un singleton (sans intérêt) et  $V_2 = W$ .

Les métriques oscillantes d'ordre 2 (précisées dans la définition 27-2.) sont celles pour lesquelles  $V_1 = S^3(\rho)$  (et  $V_2$  est noté  $V$ ).

On considère une cellule type  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  avec  $W = V_1 \times V_2$  où  $V_1$  et  $V_2$  sont deux variétés riemanniennes compactes ( $V_1$  pouvant être éventuellement de dimension 0).

Soient :

- $g_0$  une métrique de potentiel neutre sur  $\mathcal{C}$  :  $g_0 = g_\Theta \times (-g_{S^1(\delta)}) \times g_{V_1} \times g_{V_2}$ .
- $g_{\mathcal{P}}$  une métrique représentant un potentiel actif :  $g_{\mathcal{P}} = g_0 + h$  (sous-section 1.4.2).
- $E_{V_2}(\mu_2)$  un espace propre du laplacien sur la variété  $(V_2, g_{V_2})$  associé à la valeur propre  $\mu_2$ .

**Définition 26.** Un potentiel (de métrique  $g_{\mathcal{P}}$ ) est **neutre sur**  $E_{V_2}(\mu_2)$  si :  
 quelles que soient les fonctions  $\varphi : \Theta \times S^1(\delta) \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta \in E_{V_2}(\mu_2)$  :

$$\square_{g_{\mathcal{P}}}(\varphi\beta) = (\square_{g_{\mathcal{P}}}\varphi + \mu_2\varphi)\beta \quad (2.5)$$

( $\varphi$  et  $\beta$  peuvent être considérées définies sur  $\mathcal{C}$ )

Évidemment, l'égalité 2.5 est toujours vérifiée pour la métrique  $g_0$ , celle-ci étant une métrique « produit ». Elle l'est aussi pour toute métrique de potentiel  $g_{\mathcal{P}}$  si  $\mu_2 = 0$ . Cette définition traduit le fait que la métrique  $g_{\mathcal{P}}$  n'a pas plus d'influence sur l'espace propre  $E_{V_2}(\mu_2)$  que n'en a la métrique  $g_0$  (ou du moins que la différence d'influence est négligeable).

Si l'on considère un domaine de type « métrique oscillante élémentaire associée à  $E_{\lambda,\mu}$  dans un potentiel » (def. 26), pour lequel  $W = V_1 \times V_2$  et  $E_{\lambda,\mu} = E_{S^1(\delta)}(\lambda) \otimes E_{V_1}(\mu_1) \otimes E_{V_2}(\mu_2)$  (avec  $k_1 := \dim V_1$  et  $k_2 := \dim V_2$ ), la fonction  $a$  s'écrit sous la forme :

$$a = \sum_{i=1}^{k_2} \varphi_i \beta_i \quad (2.6)$$

où les  $\beta_i$  forment une base de  $E_{V_2}(\mu_2)$  et les fonctions  $\varphi_i : \Theta \times S^1(\delta) \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifient :  
 $\forall x \in \Theta, \quad \varphi_{i_x}(\cdot) \in E_{S^1(\delta)}(\lambda) \otimes E_{V_1}(\mu_1) \quad (E_{V_1}(\mu_1) = \mathbb{R} \text{ si } \dim V_1 = 0).$

L'équation fondamentale 2.3 vérifiée par  $a$  s'écrit :

$$\square_{g_{\mathcal{P}}} \left( \sum_{i=1}^{k_2} \varphi_i \beta_i \right) + S \sum_{i=1}^{k_2} \varphi_i \beta_i = 0 \quad (2.7)$$

**Lorsque la métrique  $g_{\mathcal{P}}$  est neutre sur  $E_{V_2}(\mu_2)$** , l'équation 2.7 est équivalente, d'après 2.5, aux  $k$  équations **identiques** :

$$\square_{g_{\mathcal{P}}}(\varphi_i) + (\mu_2 + S)\varphi_i = 0$$

Pour la détermination de la fonction  $a$ , on est donc ramené lorsque  $g_{\mathcal{P}}$  est neutre sur  $E_{V_2}(\mu_2)$ , à l'étude d'une seule équation de la forme :

$$\square_{g_{\mathcal{P}}}(\varphi) + (\mu_2 + S)\varphi = 0 \quad (2.8)$$

où ici la fonction  $\varphi$  est définie sur  $\Theta \times S^1(\delta) \times V_1$ . Ceci est particulièrement simplificateur si  $k_1 := \dim V_1 = 1$ , ce qui est le cas lorsque  $g_{\mathcal{P}} = g_0$  puisque  $g_0$  est neutre sur  $W$  suivant la définition 26, mais ce sera aussi le cas pour les potentiels actifs d'ordre 1 comme on va le préciser dans le paragraphe suivant.

Les potentiels que l'on va considérer dans la suite sont essentiellement les potentiels actifs « sans électromagnétisme » et « électromagnétiques » (sous-section 1.4.2).

Comme on l'a déjà annoncé, les résultats expérimentaux qui concernent les potentiels électromagnétiques seront correctement décrits (effet de « spin » compris) lorsque la cellule type se décompose sous la forme suivante :

$$\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V \quad (2.9)$$

où  $S^3(\rho)$  est la sphère riemannienne standard de dimension 3 et de rayon  $\rho$ .

**Lorsque l'on négligera les effets de « spin »**, on supposera que le potentiel électromagnétique  $g_{\mathcal{P}}$  est neutre sur  $E_{S^3(\rho) \times V}(\mu)$  (auquel cas la décomposition  $W = S^3(\rho) \times V$  est inutile). Ceci pour un domaine de type « métrique oscillante élémentaire associée à  $E_{\lambda, \mu} = E_{S^1(\delta)} \times E_{S^3 \times V}(\mu)$  » (def. 21).

**Lorsque l'on tiendra compte des effets de « spin »**, on supposera que le potentiel  $g_{\mathcal{P}}$  est neutre seulement sur  $E_V(\mu_2)$ . (Dans le premier cas on pourra considérer que l'on a « moyennisé » à priori le potentiel  $g_{\mathcal{P}}$  du second cas sur  $S^3(\rho)$ ).

Quant aux potentiels sans « électromagnétisme », ils seront souvent considérés neutres sur  $E_{S^3 \times V}(\mu)$ .

Les potentiels actifs « sans électromagnétisme » et « électromagnétiques » ont été décrits précisément par les propositions 3 et 4. La proposition suivante, dont la démonstration (très simple) est donnée dans l'annexe 3.6, précise des conditions qui rendent ces potentiels « neutres » sur  $E_{V_2}(\mu)$  lorsque la cellule est de la forme  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times V_1 \times V_2$ .

*Proposition 8.*

1. Si, pour un potentiel actif sans électromagnétisme (proposition 3), le champ de vecteurs  $X_1$  s'annule sur  $E_{V_2}(\mu_2)$  (c.a.d si  $\forall \beta \in E_{V_2}(\mu_2), X_1(\beta) = 0$ ), alors ce potentiel est neutre sur  $E_{V_2}(\mu_2)$ .
2. Si, pour un potentiel électromagnétique (proposition 4), les deux champs de vecteurs  $\Upsilon$  et  $X_2$  s'annulent sur  $E_{V_2}(\mu_2)$ , alors ce potentiel est neutre sur  $E_{V_2}(\mu_2)$ .

Les considérations précédentes amènent donc à affiner la classification des métriques oscillantes élémentaires. On donne dans le paragraphe suivant la définition précise des métriques oscillantes élémentaires d'ordre 1 et 2.

### Les métriques oscillantes élémentaires d'ordre 1 et 2 dans un potentiel

La cellule type considérée est  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  et  $W$  est décomposée sous la forme  $W = S^3(\rho) \times V$  pour l'ordre 2.

Une métrique de potentiel neutre est de la forme :

$$g_0 = g_\Theta \times (-g_{S^1(\delta)}) \times g_W \text{ et } g_W = g_{S^3(\rho)} \times g_V \text{ pour l'ordre 2.}$$

*Définition 27.*

1. Un domaine de type **métrique oscillante élémentaire d'ordre 1 dans un potentiel** est un domaine de type métrique oscillante dans un potentiel (def. 20) pour lequel la fonction  $a : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  est de la forme :  
 $a = \varphi\beta$  où  $\beta \in E_W(\mu)$  et  $\varphi : \Theta \times S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie :  
 $\forall x \in \Theta, \quad \varphi_x(\cdot) \in E_{S^1(\delta)}(\lambda).$   
 De plus, le potentiel est neutre sur  $E_W(\mu)$ .
2. Un domaine de type **métrique oscillante élémentaire d'ordre 2 dans un potentiel** est un domaine de type métrique oscillante dans un potentiel (def 20) pour lequel la fonction  $a : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  est de la forme :  
 $a = \phi\beta$  où  $\beta \in E_V(\mu)$  et  $\phi : \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie :  
 $\forall x \in \Theta, \quad \phi_x(\cdot) \in E_{S^1(\delta)}(\lambda) \otimes E_{S^3(\rho)}(\gamma).$   
 De plus, le potentiel est neutre sur  $E_V(\nu)$ .

Que ce soit pour l'ordre 1 ou 2, cette définition correspond à la définition 21 lorsque l'on a pris pour la fonction  $a$  **un seul** des termes de la décomposition 2.6. (On rappelle que ceci est justifié par le fait que la contrainte sur les potentiels donne des équations identiques de la forme 2.8 pour chacun des termes de la somme 2.6) .

*Remarque 20.* On aurait pu définir les métriques oscillantes « d'ordre 0 » dans le cas particulier où  $\lambda = 0$  alors qu'on les a classées dans celles d'ordre 1.

Puisque  $E_{S^1(\delta)}(0)$  s'identifie naturellement à  $\mathbb{R}$  et  $E_{S^1(\delta)}(\lambda)$  à  $\mathbb{C}$  lorsque  $\lambda > 0$  (comme on le précisera dans la section 2.10), la fonction  $\varphi$  de la définition précédente s'identifie à une fonction **réelle** définie sur  $\Theta$  lorsque  $\lambda = 0$  et à une fonction **complexe** si  $\lambda > 0$ . De même, comme  $E_{S^1(\delta)}(\lambda) \otimes E_{S^3(\rho)}(\gamma)$  s'identifie au complexifié  $E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$ , la fonction  $\varphi$  d'une métrique oscillante élémentaire d'ordre 2 s'identifie à une fonction à valeurs dans  $E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$  définie sur  $\Theta$ .

Comme on l'a déjà précisé, le processus peut éventuellement être poursuivi pour définir des métriques oscillantes d'ordre  $k > 2$  correspondant à des décompositions plus fines de  $W$  que celle de la forme  $S^3(\rho) \times V$ , mais ceci ne sera pas abordé dans ce papier.

*Remarque 21.* Le lecteur familier avec la T.Q.C pourra commencer à faire le parallèle suivant avec la théorie présentée ici :

1. Les métriques oscillantes élémentaires d'ordre 0 s'apparentent aux champs scalaires de la T.Q.C, celles d'ordre 1 aux champs complexes, celles d'ordre 2 aux champs spinoriels, etc.
2. Les quanta des « champs » de la T.Q.C s'apparenteront aux singularités présentées dans la section 2.13.

3. L'espace de Fock d'un « système de particules » est remplacé par l'espace des fonctions régulières  $\{a : \mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W \rightarrow \mathbb{R}\}$ .
4. Aucun lagrangien, hamiltonien et processus de « quantification » ne sera ici utilisé. Tout sera « géré » par la seule équation fondamentale 2.2 qui n'est qu'une simple conséquence du type géométrique choisi.
5. La description précise des expériences que l'on déduira de la théorie présentée ici sera profondément différente de celle donnée en physique quantique classique et en T.Q.C. Elle sera essentiellement liée à la « déformation » de l'espace-temps  $\mathcal{M}$  dont l'interprétation ne pourra être précisée qu'après la section 2.14.

## 2.8 Des exemples importants de métriques oscillantes élémentaires dans un potentiel neutre

Les exemples (très) particuliers de métriques oscillantes que l'on va décrire dans cette section sont ceux qui, en langage de physique classique, représentent les « flots de particules » se déplaçant à une vitesse constante  $\vec{v}$  (donc nécessairement dans un potentiel neutre et dans le cadre de l'approximation linéaire). Ils vont permettre, par exemple, d'écrire précisément des « conditions aux limites » pour la description d'expériences dont le principe est basé sur « l'envoi de particules » lancées à une vitesse  $\vec{v}$  dans un système physique. Ces exemples vont aussi permettre d'introduire naturellement la notion de charge électrique **relative** et ceci sera ensuite étendu à une classe de métriques oscillantes bien plus générale (section 2.9). Nous commençons par considérer le cas des métriques oscillantes élémentaires d'ordre 1 (def. 27), l'extension au cas plus général des métriques oscillantes élémentaires associées à  $E_{\lambda,\mu}$  (def. 21) ne pose pas de difficultés et sera présentée en fin de cette section.

### 2.8.1 Les métriques oscillantes élémentaires homogènes d'ordre 1 dans un potentiel neutre

D'après la définition 27, la fonction  $a$  qui caractérise une métrique oscillante élémentaire d'ordre 1 dans un potentiel est de la forme  $a = \varphi\beta$  où  $\beta \in E_W(\mu)$  et  $\varphi : \Theta \times S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie :  $\forall x \in \Theta \quad \varphi_x(\cdot) \in E_{S^1(\delta)}$ .

On suppose que cette métrique oscillante est « **homogène-stationnaire** », ce que l'on traduit en disant que la fonction  $a$  ne dépend pas des variables d'espace  $(x^1, x^2, x^3)$  de  $\Theta$ .

Cette propriété n'est évidemment pas invariante par les transformations de Lorentz sur  $\Theta$ , le mot « stationnaire » est relatif au choix de la carte de l'atlas d'observation.

La fonction  $\varphi$  est alors de la forme :

$$\varphi(t, u) = \varphi_1(t) \cos(Q^+ u) + \varphi_2(t) \sin(Q^+ u)$$

où l'on a posé  $t = x^0$ ,  $u = x^4$  et  $Q^+ := \sqrt{\lambda}$  est la fréquence de charge électrique (def. 22).

L'équation fondamentale 2.3 s'écrit ici :

$$\square_{g_0} a + S a = 0$$

$$\text{où } S = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{g_0} \text{ et } \square_{g_0} = \partial^2 / \partial t^2 - \sum_{k=1}^3 \partial^2 / (\partial x^k)^2 + \partial^2 / \partial u^2 + \Delta_{g_{0W}}$$

Ce qui donne, en utilisant le fait que  $\Delta_{g_{0W}}(\beta) = \mu\beta$  :

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} \cos(Q^+ u) + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \sin(Q^+ u) + (S + \mu - (Q^+)^2) \varphi = 0$$

Ce qui équivaut à :

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = -M^2 \varphi_1 \text{ et } \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} = -M^2 \varphi_2$$

puisque  $M^2 = S + \mu - (Q^+)^2$

Autrement dit, les métriques oscillantes qui vérifient les propriétés précédentes ont leurs fonctions  $a$  (vues dans la carte de l'atlas d'observation) qui sont de la forme :

$$a = \beta((A_1 \cos(Mt) + A_2 \sin(Mt)) \cos(Q^+ u) + (B_1 \cos(Mt) + B_2 \sin(Mt)) \sin(Q^+ u))$$

où  $A_1, A_2, B_1, B_2$  sont des constantes.

Ce qui s'écrit, après transformations :

$$a = \beta(C_1 \cos(Mt + Q^+ u) + C_2 \sin(Mt + Q^+ u)) + \beta(C_3 \cos(Mt - Q^+ u) + C_4 \sin(Mt - Q^+ u))$$

$$\text{où } C_1 = 1/2(A_1 - B_2), C_2 = 1/2(A_2 + B_1), C_3 = 1/2(A_1 + B_2), C_4 = 1/2(A_2 - B_1)$$

Les fonctions  $a$  s'écrivent donc sous la forme  $a^+ + a^-$  avec :

$$a^+ = \beta(C_1 \cos(Mt + Q^+ u) + C_2 \sin(Mt + Q^+ u))$$

$$a^- = \beta(C_3 \cos(Mt - Q^+ u) + C_4 \sin(Mt - Q^+ u))$$

Et l'on remarquera qu'il n'y a pas d'ambiguïté pour la définition de  $a^+$  et  $a^-$  à condition que  $M$  soit non nul.

Si l'on pose  $Q = Q^+$  pour  $a^+$  et  $Q = -Q^+$  pour  $a^-$ , les fonctions  $a^+$  et  $a^-$  s'écrivent sous la même forme :

$$\beta(C \cos(Mt + Qu) + C' \sin(Mt + Qu))$$

La constante  $Q$  définira, sur cet exemple très particulier, **la charge électrique relative** de la métrique oscillante, positive pour  $a^+$ , négative pour  $a^-$ , et ceci n'est bien défini que si  $M > 0$ . (On peut lier  $a^+$  et  $a^-$  à la notion de « particule » et « antiparticule »)

On donne donc la définition suivante :

**Définition 28.** Un domaine de type *métrique oscillante élémentaire homogène-stationnaire pour*  $(\mathcal{V}, \zeta)$ , **d'ordre 1**, est un domaine  $\mathcal{V}$  de type « métrique oscillante élémentaire d'ordre 1 dans un potentiel neutre » pour lequel, dans la carte  $(\mathcal{V}, \zeta)$  la fonction  $a$  est de la forme :

$$a = \varphi\beta \text{ où } \beta \in E_W(\mu) \text{ et } \varphi : \Theta \times S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R} \text{ vérifie :}$$

$$\varphi(t, x^1, x^2, x^3, u) = C \cos(Mt + Qu) + C' \sin(Mt + Qu)$$

(et ne dépend donc pas de  $x^1, x^2, x^3$ ).

(Ici  $Q$  est la charge électrique relative et peut être positive ou négative).

Pour définir une métrique oscillante élémentaire homogène **qui se déplace à une vitesse constante  $\vec{v}$  relativement à une carte  $(\mathcal{V}', \zeta')$  de l'atlas d'observation**, il suffit naturellement de considérer une transformation de Lorentz  $:\wedge : \Theta \rightarrow \Theta'$  qui correspond à un observateur lié à  $\Theta'$  se déplaçant à une vitesse  $-\vec{v}$  relativement à  $\Theta$ . On définit alors la  $g_0$ -isométrie  $\sigma : \mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W \rightarrow \mathcal{C}' = \Theta' \times S^1(\delta) \times W$  en posant  $\sigma = \wedge \times I_d$  où  $I_d$  désigne l'application identité sur  $S^1(\delta) \times W$ .

On laisse le soin au lecteur de vérifier que la fonction  $a \circ \sigma$ , qui correspond à la fonction de la métrique oscillante « vue » dans la carte  $(\mathcal{V}', \zeta')$ , lorsque  $a$  est celle « vue » dans  $(\mathcal{V}, \zeta)$ , est de la forme  $a \circ \sigma = \varphi' \beta$  où  $\beta \in E_W(\mu)$  et

$$\varphi'(t, (x^k), u) = C \cos(M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k + Qu) + C' \sin(M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k + Qu).$$

Le vecteur vitesse  $\vec{v}$  s'écrit  $(1/M')(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$  et  $\sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 < M'^2$ .

(Ici l'espace tangent en un point quelconque de  $\Omega$  est canoniquement identifié à  $\mathbb{R}^3$  lorsque  $I \times \Omega = \Theta \subset \mathbb{R}^4$ ).

La constante  $M' > 0$  est appelée **la masse relativiste vue dans la carte  $(\mathcal{V}', \zeta')$** . Le fait que, par définition,  $\square_{g_o} a + S a = 0$  montre que  $M = (1 - |\vec{v}|^2)^{1/2} M'$  où  $M$  est la masse (au repos) déjà définie.

On donne donc la définition suivante :

*Définition 29. Une métrique oscillante élémentaire homogène (d'ordre 1) dans un potentiel neutre a une vitesse de propagation constante  $\vec{v}$  relative à une carte  $(\mathcal{V}, \zeta)$  de l'atlas d'observation si la fonction  $a = \varphi \beta$  correspondante est telle que :*

$$\varphi(t, (x^k), u) = C \cos(M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k + Qu) + C' \sin(M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k + Qu).$$

*le vecteur vitesse est alors  $\vec{v} = (1/M')(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ .*

Lorsque  $\vec{v} = 0$  on retrouve évidemment la définition 28.

### 2.8.2 Le cas plus général des métriques oscillantes élémentaires associées à $E_{\lambda, \mu}$

Si l'on choisit une base  $(\beta_1, \dots, \beta_k)$  de  $E_W(\mu)$ , la fonction  $a$  représentant une telle métrique oscillante se décompose sous la forme 2.5 :

$$a(x, u, w) = \sum_{i=1}^k (\varphi_{1,i}(x) \cos(Q^+ u) + \varphi_{2,i}(x) \sin(Q^+ u)) \beta_i(w)$$

Chaque terme de cette somme peut être considéré comme étant la fonction  $a_i$  d'une métrique oscillante élémentaire d'ordre 1.

*Définition 30. Un domaine de type métrique oscillante élémentaire associée à  $E_{\lambda, \mu}$  est **homogène stationnaire pour une carte  $(\mathcal{V}, \zeta)$**  si  $\forall i$  de 1 à  $k$ , les fonctions  $a_i$  correspondent à celles données dans la définition 28, toutes avec la même valeur de  $Q$ . (Lorsque  $Q = \sqrt{\lambda} = Q^+$ , la charge électrique relative est positive, Lorsque  $Q = -\sqrt{\lambda} = -Q^+$  elle est négative).*

On généralise de même la définition 29.

Ces définitions ne dépendent évidemment pas du choix de la base  $(\beta_1, \dots, \beta_k)$ .

## 2.9 La charge électrique relative

On étend ici la notion de charge électrique relative, que l'on a introduite dans la sous-section précédente, au cadre plus général des métriques oscillantes élémentaires associées à  $E_{\lambda,\mu}$  (def 21) pour lesquelles la notion de charge électrique absolue a été précisée dans les définitions 22 et 23. On rappelle qu'ici la cellule type est  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$ , les fonctions  $a : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  vérifient :  $\forall x \in \Theta \quad a_x(\cdot) \in E_{\lambda,\mu}$ .

**Définition 31.** Un domaine de type métrique oscillante élémentaire associée à  $E_{\lambda,\mu}$  dans un potentiel  $a$  **une charge électrique (relative) bien définie** si  $Q^+ = 0$ , ou si le champ de vecteurs défini sur  $\Theta$  par :

$$\int_{S^1 \times W} \frac{\partial a}{\partial u} (\overrightarrow{\text{grad}}_{g_{0\Theta}} a) dv_{g_{0S^1 \times W}} \quad (2.10)$$

est un champ de vecteurs **de genre temps** qui est de plus :

1. Soit partout dans l'orientation en temps de  $\Theta$ .
2. Soit partout opposé à l'orientation en temps de  $\Theta$ .

Dans le premier cas, la **fréquence de charge relative**  $Q$  est définie par  $Q^+$ , dans le second cas par  $-Q^+$ .

(On définit comme précédemment la **charge électrique**  $q$  en posant  $q = \hbar Q$ )

Dans l'intégrale 2.10, la fonction  $\frac{\partial a}{\partial u} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  n'est autre que la fonction  $Y(a)$  où  $Y$  est le champ de vecteurs qui définit l'électromagnétisme, et le champ  $\overrightarrow{\text{grad}}_{g_{0\Theta}} a$  est le champ de vecteurs tangents à  $\Theta$  défini par :

$$\overrightarrow{\text{grad}}_{g_{0\Theta}} a := (\partial_0 a) \partial_0 - \sum_{k=1}^3 (\partial_k a) \partial_k \quad \text{où} \quad \partial_0 := \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad \partial_k := \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

De par sa définition « intrinsèque », la charge électrique relative est invariante par les transformations de Lorentz sur  $\Theta$  qui conservent l'orientation en temps.

On laisse le soin au lecteur de vérifier que la charge électrique relative donnée par la définition 31 correspond à celle donnée dans le cadre particulier des métriques oscillantes homogènes (defs. 29 et 30) et que, lorsque  $M = 0$ , le champ de vecteurs défini par 2.10 est de genre espace ou de genre lumière. (La charge électrique relative n'est donc pas bien définie dans ce cas).

## 2.10 Les fonctions canoniques associées aux métriques oscillantes élémentaires d'ordre 1 et 2

On rappelle que la cellule type considérée pour ces métriques oscillantes est  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  et que  $W$  est décomposée sous la forme  $W = S^3(\rho) \times V$  pour l'ordre 2.

Une métrique de potentiel neutre est de la forme  $g_0 = g_\Theta \times (-g_{S^1(\delta)}) \times g_W$  où  $g_W = g_{S^3(\rho)} \times g_V$  pour l'ordre 2.

D'après la définition 27, la fonction  $a$  qui caractérise la métrique oscillante vérifie pour l'ordre 1 :



$$a = \varphi\beta$$

où  $\beta \in E_{S^3 \times V}(\mu)$  et  $\varphi : \Theta \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie :  $\forall x \in \Theta, \quad \varphi_x(\cdot) \in E_{S^1(\delta)}(\lambda)$ .

On a donc :  $\forall (x, u) \in \Theta \times S^1(\delta)$ ,

$$\varphi_x(u) = \varphi_1(x) \cos(Q^+ u) + \varphi_2(x) \sin(Q^+ u). \quad (2.11)$$

Et pour l'ordre 2 :

$$a = \phi\beta$$

où  $\beta \in E_V(\nu)$  et  $\phi : \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie :

$\forall x \in \Theta, \quad \phi_x(\cdot) \in E_{S^1(\delta)}(\lambda) \otimes E_{S^3(\rho)}(\nu)$ .

On a donc :  $\forall (x, u, s) \in \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho)$ ,

$$\phi_x(u, s) = \phi_{1,x}(s) \cos(Q^+ u) + \phi_{2,x}(s) \sin(Q^+ u). \quad (2.12)$$

Nous allons définir **les fonctions canoniques** à partir des fonctions  $\varphi$  et  $\phi$  précédentes. Ces fonctions contiendront toutes les informations essentielles de la fonction  $a$  et seront plus simples à manipuler que cette dernière. Elles auront comme autre intérêt d'être définies sur « l'espace apparent »  $\Theta \subset \mathbb{R}^4$  et pourront donc être comparées aux fonctions qui interviennent dans les théories quantiques standard.

*Définition 32.*

1. On considère un domaine de type « métrique oscillante élémentaire **d'ordre 1** dans un potentiel ».

**La fonction canonique** associée à ce domaine est la fonction **complexe**  $a_c : \Theta \rightarrow \mathbb{C}$  donnée, lorsque  $Q^+ \neq 0$ , par  $a_c(x) := \varphi_1(x) + i\varphi_2(x)$

où  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont définies par 2.11,

et donnée simplement par  $a_c = \varphi_1$  si  $Q^+ = 0$  (c'est, dans ce dernier cas, une fonction réelle).

2. On considère un domaine de type « métrique oscillante élémentaire **d'ordre 2** dans un potentiel ».

**La fonction canonique** associée à ce domaine est la fonction

$$a_c : \Theta \rightarrow E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$$

donnée, lorsque  $Q^+ \neq 0$ , par  $a_c(x) := \phi_{1,x} + i\phi_{2,x} \in E_{S^3(\rho)}(\gamma) + iE_{S^3(\rho)}(\gamma)$

(où  $E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$  est le « complexifié »  $\mathbb{C} \otimes E_{S^3(\rho)}(\gamma) = E_{S^3(\rho)}(\gamma) + iE_{S^3(\rho)}(\gamma)$  et  $\phi_{1,x}$  et  $\phi_{2,x}$  sont définies par 2.12),

et donnée simplement par  $a_c(x) := \phi_{1,x}$  si  $Q^+ = 0$ .

On peut, bien sûr, étendre cette définition aux métriques oscillantes élémentaires d'ordre  $k > 2$  lorsque la variété compacte  $V$  est décomposée en produit.

En fait, les fonctions canoniques  $a_c$  sont directement liées à l'existence des isomorphismes canoniques suivants que nous utiliserons lors des démonstrations :

On considère les espaces propres  $E_{S^1(\delta)}(\lambda)$ . Pour les valeurs propres  $\lambda \neq 0$  tous ces espaces propres sont de dimension 2 et ont pour base canonique les deux fonctions «  $\cos(\sqrt{\lambda}u)$  » et «  $\sin(\sqrt{\lambda}u)$  » exprimées dans le système de coordonnées standard de  $S^1(\delta)$  orientée (cf. 1.2.1). Lorsque  $\lambda \neq 0$ , l'isomorphisme canonique  $\mathbb{C}_\lambda : E_{S^1(\delta)}(\lambda) \rightarrow \mathbb{C}$  est défini par :

$$\mathbb{C}_\lambda(A \cos(\sqrt{\lambda}(\cdot)) + B \sin(\sqrt{\lambda}(\cdot))) := A + iB \quad (2.13)$$

Dans le cas des métriques oscillantes d'ordre 1, la fonction canonique  $a_c$  vérifie donc :  
 $\forall x \in \Theta, a_c(x) = \mathbb{C}_\lambda(\varphi_x(\cdot)).$

L'isomorphisme  $\mathbb{C}_\lambda$  induit alors naturellement un isomorphisme :

$$\mathbb{C}_{\lambda,\gamma} : E_{S^1(\delta)}(\lambda) \otimes E_{S^3(\delta)}(\gamma) \rightarrow E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma) \quad (2.14)$$

Et dans le cas des métriques oscillantes d'ordre 2, la fonction canonique  $a_c$  vérifie :  
 $\forall x \in \Theta, a_c(x) = \mathbb{C}_{\lambda,\gamma}(\phi_x(\cdot)).$

On montre alors rapidement que, pour l'ordre 1 ou 2 :

$$a = Re(\beta e^{-iQ^+u} a_c) \quad (2.15)$$

## 2.11 Les équations de Klein-Gordon (pour différents potentiels) obtenues comme simples conséquences de la définition du « type géométrique »

Le résultat important de cette section est énoncé dans le théorème 3 qui va suivre. Il concerne les métriques oscillantes élémentaires d'ordre 1 dans un potentiel. En fait, celles d'ordre 2, qui tiennent compte de la notion de « spin », se traitent de manière identique, mais pour la clarté de l'exposé nous ne présenterons ce cas que dans la section 2.15.

Les équations obtenues ne sont que des traductions de l'équation fondamentale  $\square_{g_P} a + S a = 0$  vérifiée dans un domaine de type « métrique oscillante élémentaire dans un potentiel ».

On commence par rappeler et préciser ce que sont les domaines de type « potentiel » que l'on va utiliser et que l'on a déjà étudiés (cf. 1.4.2 et 1.5) :

On considère une carte  $(U, \zeta)$  de l'atlas d'observation telle que  $\zeta(U)$  soit la cellule type  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  dont les coordonnées seront notées  $(x, u, w)$  avec  $x = (t, x^1, x^2, x^3) \in \Theta \subset \mathbb{R}^4$ , les coordonnées de « genre temps »  $x^0$  et  $x^4$  sont ici notées  $t$  et  $u$ .

### 1. le potentiel neutre

La métrique est  $g_0 = g_\Theta \times (-g_{S^1(\delta)}) \times g_W$  où  $g_\Theta$  est la métrique de Minkovski sur  $\Theta \subset \mathbb{R}^4$ ,  $g_{S^1(\delta)}$  est la métrique standard de  $S^1(\delta)$ ,  $g_W$  est une métrique riemannienne sur la variété compacte  $W$  à courbure scalaire constante.

### 2. Le potentiel actif sans électromagnétisme

La métrique est, comme on l'a vu (cf. 1.4.2), de la forme  $g = g_0 + h$  où, en chaque point  $P$ , l'endomorphisme  ${}^e h_P$  est nilpotent d'indice 2. On a (proposition 3) :

$$h = -2vX_1^\flat \otimes X_1^\flat, \quad g_0(X_1, \frac{\partial}{\partial t}) = 1, \quad g_0(X_1, Y) = 0, \quad g_0(X_1, X_1) = 0.$$

Ici  $v$  est la fonction potentiel et  $X_0$  a été choisi égal à  $\frac{\partial}{\partial t}$  qui est lié à la carte de l'atlas d'observation.

On suppose que l'hypothèse  $H_N$  posée pour l'étude des géodésiques (cf. 1.5.1) est vérifiée (avec  $D_{g_0}X_1 = 0$ ), que  $S_g = S_{g_0}$  (voir la remarque 14) et que la métrique  $g$  est neutre sur  $E_W(\mu)$  (def. 26) lorsque la métrique oscillante considérée est associée à  $E_{\lambda, \mu} := E_{S^1}(\lambda) \otimes E_W(\mu)$ .

Ces derniers points sont récapitulés dans l'hypothèse  $H_{1,N}$  suivante :

- (a)  $S_{\mathcal{P}} = S_{g_0}$ .
  - (b) La fonction potentiel  $v$  est définie sur  $\mathcal{U}$  lorsque  $\Theta = I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ .
  - (c) Le champ de vecteurs  $X_1$  est défini sur  $I \times W$ ,  $D_{g_0}X_1 = 0$  et  $X_1$  s'annule sur  $E_W(\mu)$ .
3. **le potentiel électromagnétique**

La métrique est, comme on l'a vu (cf. 1.4.2), de la forme  $g = g_0 + h$  où, en chaque point  $P$ , l'endomorphisme  ${}^e h_P$  est nilpotent d'indice 2 ou 3. On a (proposition 4) :

$$h = \Upsilon^\flat \otimes X_2^\flat + X_2^\flat \otimes \Upsilon^\flat, \quad g_0(X_2, Y) = 1, \quad g_0(X_2, \Upsilon) = 0, \quad g_0(X_2, X_2) = 0.$$

on suppose que l'hypothèse  $H_E$  posée pour l'étude des géodésiques (cf. 1.5.1) est vérifiée (avec  $D_{g_0}X_2 = 0$ ), que  $S_g = S_{g_0}$  (voir la remarque 15) et que la métrique  $g$  est neutre sur  $E_W(\mu)$  (def. 26).

Ces derniers points sont récapitulés dans l'hypothèse  $H_{1,E}$  suivante :

- (a)  $S_{\mathcal{P}} = S_{g_0}$ .
- (b) Le champ de vecteurs  $\Upsilon$  est défini sur  $\Theta$ .
- (c) Le champ de vecteurs  $X_2$  est défini sur  $S^1(\delta) \times W$ ,  $D_{g_0}(X_2) = 0$  et  $X_2$  s'annule sur  $E_W(\mu)$ .

Les hypothèses  $H_{1,N}$  et  $H_{1,E}$  peuvent être vues comme des « approximations » qui traduisent le fait que l'on néglige certains effets quantiques relatifs à la variété compacte  $W$ . Ne pas supposer ces hypothèses apporterait des termes perturbatifs supplémentaires dans les équations données par le théorème 3. Il peut être intéressant d'étudier ces perturbations, cependant le problème est plus délicat qu'il n'y paraît au premier abord car, si l'on approfondit les détails de la démonstration du théorème 3, on s'aperçoit que le fait d'avoir choisi l'approximation linéaire (section 2.3) impose des contraintes sur les potentiels (réalisées en particulier par les hypothèses  $H_{1,N}$  et  $H_{1,E}$ ). Supprimer totalement les hypothèses  $H_{1,N}$  et  $H_{1,E}$  obligerait donc à utiliser l'équation fondamentale 2.2 et non son approximation linéaire 2.3, ce qui rend l'étude beaucoup plus difficile.

**Théorème 3.** *On considère un domaine de type « métrique oscillante élémentaire d'ordre 1 dans un potentiel » (def. 27).*

*Alors, dans les 3 cas de potentiels considérés, la fonction canonique  $a_c$  vérifie les équations « de Klein-Gordon » suivantes :*

1. **Dans un potentiel neutre.**

$$\square_{\Theta} a_c + M^2 a_c = 0 \tag{2.16}$$

où  $\square_{\Theta} = \frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2}$  et  $M$  est la fréquence de masse de la métrique oscillante.

2. Dans un potentiel sans électromagnétisme sous l'hypothèse  $H_{1,N}$ .

$$\square_{\Theta} a_c + M^2 a_c - 2v \frac{\partial^2 a_c}{(\partial t)^2} = 0 \quad (2.17)$$

où  $v$  est la fonction potentiel (def. 17)

3. Dans un potentiel électromagnétique sous l'hypothèse  $H_{1,E}$ .

$$\sum_{j=0}^3 \varepsilon_j (i \frac{\partial}{\partial x^j} + Q^+ \Upsilon^j)^2 a_c + M^2 a_c = 0 \quad (2.18)$$

où  $\varepsilon_j = g_{0jj}$  c.a.d :  $\varepsilon_0 = -1$  et  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$ .

(Le carré d'un opérateur différentiel se comprend, bien sûr, comme le composé par lui même).

La démonstration de ce théorème est détaillée dans l'annexe (3.7).

*Remarque 22.* Les équations 2.16 et 2.18 sont invariantes par les changements de cartes qui proviennent des transformations de Lorentz. Ce n'est pas le cas pour l'équation 2.17 car le « champ d'observation »  $X_0$  a été choisi égal à  $\frac{\partial}{(\partial t)}$  lié à une carte de l'atlas d'observation, et celui-ci n'est pas invariant par les transformations de Lorentz.

**Il est important de noter que les équations données par ce théorème sont des conclusions obligées de la seule définition d'un domaine « à courbure scalaire constante, conforme à un potentiel » dans le cadre de l'approximation linéaire. Aucune loi, aucun principe n'a été ajouté pour obtenir ces équations.**

**Remarque sur l'équation de Dirac.**

Les équations de type Klein-Gordon données par le théorème 3 sont de la forme  $D(a_c) = 0$  où  $D$  est un opérateur différentiel **d'ordre 2**. Dans un potentiel neutre,  $D = \square_{\Theta} + M^2$ . L'équation de Dirac est obtenue en « factorisant » l'opérateur différentiel  $D$  en deux opérateurs différentiels **d'ordre 1**. Le fait d'avoir des opérateurs différentiels d'ordre 1 est fondamental en physique quantique standard, essentiellement pour rendre cohérent l'axiomatique probabiliste de cette dernière. Ceci n'est pas du tout le cas pour la théorie que nous présentons ici comme on le précisera dans la section 2.14. Nous n'avons donc aucun intérêt, d'un point de vue conceptuel, à introduire des équations d'ordre 1 et ce sont les équations du théorème 3 qui resteront fondamentales.

Cependant, d'un point de vue simplement « calculatoire » il peut être utile, dans l'étude des solutions des équations de Klein-Gordon, de décomposer l'opérateur différentiel d'ordre 2 en « composé » d'opérateurs d'ordre 1. Ceci permet d'introduire simplement la notion d'« exponentielle d'opérateur » et fournit un outil puissant (très utilisé en T.Q.C) qui peut être intéressant même pour nous.

Ceci dit, nous n'avons pas encore assez d'éléments à la fin de cette section pour donner l'interprétation physique des résultats du théorème 3 qui permet d'expliquer et de décrire complètement les expériences étudiées habituellement par la physique quantique standard, il faudra pour cela attendre la fin de la section 2.14.

Les équations données par le théorème 3 sont, bien sûr, valides lorsque  $M = 0$ , bien que dans ce cas la charge électrique relative ne soit en général pas définie (mais elle n'intervient pas dans ces équations). Les métriques oscillantes « à masse nulle » ont en fait des caractéristiques physiques très différentes de celles « à masse strictement positive ». La section 2.16 précisera les choses et considérera aussi les métriques oscillantes « à masse nulle » d'ordre 2.

Lorsque  $M$  est strictement positive, la section suivante va montrer que le théorème 3 redonne en approximation les équations de Schrödinger de la physique quantique standard sur la fonction d'état qui permettent l'étude du comportement « des particules dans un potentiel ». Le lien entre « la fonction d'état » que l'on va définir ici et celle de la physique quantique habituelle n'apparaîtra que plus loin.

## 2.12 La fonction d'état d'un domaine de type « métrique oscillante dans un potentiel ».

### Les équations de Schrödinger retrouvées comme approximations des équations de Klein-Gordon

La fonction d'état va être définie à partir de la fonction canonique  $a_c$  (def. 32) mais elle ne prendra de sens que dans le cadre des métriques oscillantes élémentaires pour lesquelles la charge électrique est bien définie (def 31), en particulier la masse sera supposée strictement positive. Les équations que l'on va obtenir ne seront donc valides que dans un cadre plus restreint que celui supposé dans le théorème 3.

La terminologie « fonction d'état » a été choisie car les équations vérifiées par celle-ci vont être très proches des équations de Schrödinger (dans différents potentiels) qui concernent la « fonction d'état » de la physique quantique classique. Cependant, l'interprétation des résultats « probabilistes » liés à la fonction d'état (ainsi qu'à la fonction canonique  $a_c$ ) sera fondamentalement différente et sera précisée dans la section 2.14.

*Définition 33. On considère un domaine de type « métrique oscillante élémentaire dans un potentiel » dont la masse  $m$  est strictement positive et la charge  $q$  bien définie (def. 31).*

*La fonction d'état associée à la fonction  $a$  qui caractérise la métrique oscillante (vue dans une carte de l'atlas d'observation) est la fonction :*

$$\Psi : \Theta \rightarrow \mathbb{C} \text{ pour l'ordre 1,}$$

$$\Psi : \Theta \rightarrow E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma) \text{ pour l'ordre 2,}$$

*qui vérifie :*

$$\Psi = e^{iMt} a_c \text{ si la charge électrique est positive,}$$

$$\Psi = e^{iMt} \overline{a_c} \text{ si la charge électrique est négative.}$$

*où ici le conjugué  $\overline{a_c}$  est défini dans  $\mathbb{C}$  pour l'ordre 1 et dans  $E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$  pour l'ordre 2.*

*(Si la charge électrique est nulle, ces deux égalités sont identiques :  $\Psi = e^{iMt} \varphi$ , puisque alors  $a_c = \overline{a_c} = \varphi$ ).*

On remarque que, d'après 2.15 :

$$a = \beta(\operatorname{Re}(\Psi e^{-i(Mt+Qu)})) = \beta(\Psi_1 \cos(Mt + Qu) + \Psi_2 \sin(Mt + Qu)) \quad (2.19)$$

où  $\Psi = \Psi_1 + i\Psi_2$ .

*Remarque 23.* L'idée qui amène à la définition de la fonction d'état que l'on vient de donner est de « factoriser » dans la fonction  $a$  qui caractérise la métrique oscillante, le maximum « d'oscillations » en  $t$ . En effet, comme on l'a vu, la métrique pseudo-riemannienne  $g$  d'une métrique oscillante élémentaire vérifie une forme d'« équation des ondes » et la fréquence de cette « onde » est justement la fréquence de masse  $M$ . En écrivant  $a_c = e^{-iMt} \Psi$  on cherche à ce que les variations de  $\Psi$  en  $t$  soient les plus faibles possibles, ceci en factorisant  $a_c$  par  $e^{iMt}$  qui ne fait intervenir que la constante fondamentale  $M$ . Cela ne prend vraiment de sens que lorsque la métrique oscillante considérée est « proche » d'une métrique oscillante homogène (def. 30) (lorsque celle-ci est stationnaire on montre facilement que  $\Psi$  ne dépend plus de  $t$ ), ce qui est le cas dans la description des expériences génériques de la physique quantique standard.

*Remarque 24.* Le module de  $\Psi$  est égal à celui de  $a_c$ . En physique quantique standard cela signifie que la « densité de probabilité de présence d'une particule » est aussi donnée par  $|a_c|$ . Cette égalité sera de même importante pour nous lors de « l'interprétation probabiliste » donnée dans la section 2.14.

Le théorème qui suit n'est qu'une simple réécriture du théorème 3 lorsque l'on a remplacé la fonction canonique  $a_c$  par la fonction  $\Psi$  donnée dans la définition 33 (on se restreint ici aux métriques oscillantes élémentaires d'ordre 1, celles d'ordre 2 seront étudiées dans la section 2.15). La vérification des équations obtenues est laissée au lecteur.

*Théorème 4.* Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème 3 et lorsque la charge électrique est bien définie, la fonction d'état  $\Psi$  vérifie les équations suivantes :

**1. Dans un potentiel neutre.**

$$2iM \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta \Psi + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (2.20)$$

où  $\Delta$  est le laplacien des géomètres :  $\Delta = -(\sum_1^3 \frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2})$  et  $M$  la fréquence de masse.

**2. Dans un potentiel actif sans électromagnétisme.**

$$2iM \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta \Psi + 2vM^2 \Psi + (1 - 2v) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 4iMv \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (2.21)$$

où  $v$  est la fonction potentiel.

**3. Dans un potentiel électromagnétique.**

$$2iM \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_{j=0}^3 \varepsilon_j (i \frac{\partial}{\partial x^j} + QY^j)^2 \Psi - 2MQY^0 \Psi \quad (2.22)$$

où  $\varepsilon_j = g_{0jj}$  c.a.d :  $\varepsilon_0 = -1$  et  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$ ,

$Y$  est le potentiel électromagnétique,  $Q$  la fréquence de charge électrique.

*Remarque 25.* Comme cela a déjà été précisé dans la remarque 22 qui concerne les équations de Klein-Gordon, les équations 2.20 et 2.22 sont invariantes par les changements de cartes qui proviennent des transformations de Lorentz et ce n'est pas le cas pour l'équation 2.21. Bien entendu, aucune de ces équations ne sera invariante lorsque l'on aura supprimé les termes « négligeables » pour retrouver les équations de Schrödinger classiques.

Il est intéressant de réécrire les équations obtenues dans le théorème 4 en revenant aux unités plus habituelles dans lesquelles sont écrites les équations de Schrödinger standard. Le « temps » que l'on a noté  $t$  dans le système d'unités géométriques sera noté  $\tau$  dans le système S.I, et le « temps »  $u$  sera noté  $u'$ . La masse  $m$  (en kg) et la charge électrique (en C) sont définis, on l'a vu, à partir de la fréquence de masse  $M$  et de la fréquence de charge électrique  $Q$  par :  $m := \hbar c^{-1} M$  et  $q := \hbar Q$ .

Si l'on introduit la  $\tau$ -fréquence de masse (en  $s^{-1}$ ) et la  $\tau$ -fréquence de charge électrique  $Q'$  (en  $s^{-1}$ ) en posant  $M' := cM$  et  $Q' := cQ$ , les égalités précédentes s'écrivent :

$$mc^2 = \hbar M' \quad \text{et} \quad qc = \hbar Q' \quad (2.23)$$

De même, il est naturel d'introduire le potentiel newtonien  $v'$  (en  $m^2 s^{-2}$ ) en posant  $v' := c^2 v$  (où  $v < 1$  est sans unité) et le potentiel électrique  $\phi := cY_0 = -cY^0$  puisque  $c$ 'est «  $Y_0 dt$  » qui intervient dans la définition de la 1-forme  $({}^e h(Y))^b$ .

Les équations 2.20, 2.21, 2.22 obtenues par le théorème 4 s'écrivent alors, lorsque l'on note encore  $\Psi$  la fonction dépendant des variables  $(\tau, x^1, x^2, x^3)$  :

$$i \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\hbar}{2m} \Delta \Psi + \frac{\hbar}{2mc^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} \quad (2.24)$$

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\hbar^2}{2m} \Delta \Psi + v' m \Psi + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\hbar^2}{2m} (1 - 2v'/c) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + 2i \hbar v' \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right) \quad (2.25)$$

$$i \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \frac{\hbar^2}{2m} \sum_{k=1}^3 \left( i \frac{\partial}{\partial x^k} + \frac{q}{\hbar} Y_k \right)^2 \Psi + q \phi \Psi - \frac{1}{2mc^2} \left( q \phi - i \hbar \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^2 \Psi \quad (2.26)$$

Le lecteur remarquera que, lorsque l'on a retiré le dernier terme du deuxième membre, les trois équations obtenues sont identiques aux équations de Schrödinger classiques relatives à la fonction d'état d'une particule dans un potentiel. La différence essentielle est le fait que les équations différentielles du théorème 4 sont d'ordre 2 en  $t$ .

Le dernier terme des équations 2.24, 2.25, 2.26 écrites dans le système S.I a pour coefficient  $\frac{1}{c^2}$ , ce qui laisse supposer qu'il pourra être facilement « négligé » pour redonner les équations de Schrödinger standard. Ce point doit évidemment être précisé et ceci est l'objet de la sous-section suivante.

### 2.12.1 Les $\varepsilon$ -approximations

Il s'agit ici de donner les conditions mathématiques qui permettent de justifier les approximations qui ramènent les équations données par le théorème 4 aux équations de Schrödinger classiques correspondantes. Les conditions sont classées en deux catégories : les  $\varepsilon$ -approximations pour la fonction d'état et les  $\varepsilon$ -approximations pour les potentiels.

Pour la clarté de ce qui va suivre, on commence par écrire ce que l'on a appelé « les équations de Schrödinger classiques » puis on précise leurs différences avec les équations 2.20, 2.21, 2.22, obtenues dans le théorème 4.

### Les équations de Schrödinger classiques

1. Dans un potentiel neutre.

$$2iM \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta \Psi \quad (2.27)$$

2. Dans un potentiel actif sans électromagnétisme.

$$2iM \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta \Psi + 2\nu M^2 \Psi \quad (2.28)$$

3. Dans un potentiel électromagnétique.

$$2iM \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_{k=1}^3 (i \frac{\partial}{\partial x^k} + Q \Upsilon^k)^2 \Psi - 2MQ \Upsilon^0 \Psi \quad (2.29)$$

Pour retrouver les équations 2.20, 2.21, 2.22 les termes à rajouter sont successivement les suivants :

$$1 : \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \quad 2 : (1 - 2\nu) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} + 4iM\nu \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad 3 : -(i \frac{\partial}{\partial t} + Q \Upsilon^0)^2 \Psi \quad (2.30)$$

### Les $\varepsilon$ -approximations pour la fonction d'état

L'idée intuitive est que ces approximations seront valides lorsque les vitesses mises en jeu seront très petites par rapport à la vitesse de la lumière. Dans le cadre des métriques oscillantes élémentaires, la notion de vitesse n'a été précisée que pour les métriques oscillantes homogènes dans un potentiel neutre (def. 29). On commence donc, sur cet exemple, à calculer la fonction d'état  $\Psi$  pour déterminer les liens qui existent entre les dérivées de  $\Psi$ ,  $\Psi$  elle-même et la vitesse de propagation relative à une carte  $(U, \zeta)$  de l'atlas d'observation.

La fonction  $a$  associée à une métrique oscillante homogène dans un potentiel neutre est, par définition, de la forme  $a = \varphi\beta$  où :

$$\varphi(t, (x^k), u) = C \cos(M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k + Qu) + C' \sin(M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k + Qu)$$

et  $\beta \in E_W(\mu)$  avec  $\sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 < M'^2$ .

Le vecteur vitesse  $\vec{v}$  a pour composantes  $\frac{1}{M'}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .  $M'$  est la fréquence de masse relativiste et est liée à  $M$  par :  $M = \sqrt{1 - |\vec{v}|^2} M'$ .

Un simple calcul montre que :

$$\varphi(t, (x^k), u) = (C \cos \alpha + C' \sin \alpha) \cos(Qu) + (C' \cos \alpha - C \sin \alpha) \sin(Qu)$$

où l'on a posé  $\alpha = M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k$ .

On en déduit que la fonction canonique associée (def. 32) est, si  $Q > 0$  :

$$a_c = (C \cos \alpha + C' \sin \alpha) + i(C' \cos \alpha - C \sin \alpha) = (C + iC') e^{-i(M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k)}$$

et est égale au conjugué si  $Q < 0$ .



La fonction d'état  $\Psi$  (def. 33) vérifie donc (quel que soit le signe de  $Q$ ) :

$$\Psi = (C + iC')e^{-i((M' - M)t - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k)}$$

Alors :

$$|\Psi|^2 = C^2 + C'^2, \quad \left| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right| = (M' - M)|\Psi|, \quad \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right| = (M' - M) \left| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right|$$

$$= (M' - M)^2 |\Psi|, \quad |\nabla_{x_1, x_2, x_3} \Psi|^2 = (\sum_{k=1}^3 \lambda_k^2) |\Psi|^2 = |\Delta_{x_1, x_2, x_3} \Psi|.$$

Comme  $|\vec{v}|^2 = \frac{1}{M'^2} \sum_{k=1}^3 \lambda_k^2$  et  $M' - M = ((1 - |\vec{v}|^2)^{-1/2} - 1)M = (1/2)|\vec{v}|^2 + o(|\vec{v}|^2))M$ , on en déduit :

$$\left| \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right| = (1/2)|\vec{v}|^2 + o(|\vec{v}|^2)M |\Psi|, \quad \left| \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right| = (1/4)|\vec{v}|^4 + o(|\vec{v}|^4)M^2 |\Psi| \quad (2.31)$$

L'idée est alors de considérer que les métriques oscillantes élémentaires (pour lesquelles la notion de vitesse n'a pas été définie) qui vont intervenir dans les expériences pour lesquelles les approximations que l'on va préciser sont valides (diffraction, fentes de Young, expérience de Stern-Gerlach, intrication quantique, etc.) ne sont que de « faibles perturbations » de métriques oscillantes homogènes. Les relations 2.31 ainsi que les termes donnés par 2.30 inspirent donc la définition suivante.

**Définition 34.** On considère un domaine de type « métrique oscillante élémentaire d'ordre 1 dans un potentiel » pour lequel la fonction d'état associée, relative à une carte de l'atlas d'observation, est notée  $\Psi$ .

On dira que  $\Psi$  vérifie les  $\varepsilon$ -approximations si :

Il existe un réel  $0 < \varepsilon < 1$  et deux fonctions  $\mu$  et  $\mu' : \Theta \rightarrow \mathbb{C}$  tels que :

$$\text{où, sur } \Theta : \quad \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \varepsilon^2 M \mu \Psi, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \varepsilon^4 M^2 \mu' \Psi \quad (2.32)$$

1.  $|\mu| < 1$  et  $|\mu'| < 1$

2. Il existe deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  telles que : quel que soit  $k$  de 0 à 3,

$$\left| \frac{\partial \mu}{\partial x^k} \right| < C_1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial \mu'}{\partial x^k} \right| < C_2$$

Dans les unités géométriques,  $C_1$  et  $C_2$  sont des inverses de longueur, leurs choix est précisé dans les lignes qui suivent.

Si l'on utilise le fait que  $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \varepsilon^4 M^2 \mu' \Psi$ , l'équation 2.20 s'écrit :

$$2iM \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \Delta \Psi + \varepsilon^4 M^2 \mu'_1 \Psi + i\varepsilon^4 M^2 \mu'_2 \Psi$$

où l'on a posé  $\mu' = \mu'_1 + i\mu'_2$ .

Le terme  $\varepsilon^4 \mu'_1$  apparaît donc exactement comme le potentiel newtonien  $2v$  de l'équation 2.28 et le terme  $\varepsilon^4 M^2 \mu'_2$  comme un des termes du potentiel magnétique  $Q \frac{\partial \gamma_k}{\partial x^k}$  de l'équation 2.29.

L'équation 2.20 correspond alors à une équation de Schrödinger classique avec un potentiel newtonien et un potentiel magnétique.

Si  $\varepsilon \ll 1$  et  $C_1, C_2$  sont suffisamment petits relativement aux constantes caractéristiques de l'expérience étudiée, ces potentiels peuvent être considérés comme négligeables, et la solution  $\Psi$  de 2.20 très proche de celle donnée par 2.27 (pour des conditions aux limites précisées).

Ce principe de comparaison entre les solutions peut être appliqué sans difficultés aux équations 2.21 et 2.22 en utilisant de plus le fait que  $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \varepsilon^2 M \mu \Psi$  et les contraintes que l'on va imposer maintenant aux potentiels.

*Remarque 26.* La solution d'une équation de Schrödinger « avec potentiels actifs » dépend des « dérivées » de ces potentiels, c'est pour ceci que l'on a posé la deuxième condition sur les dérivées de  $\mu$  et  $\mu'$ .

Les valeurs de  $\varepsilon$  que l'on choisit ainsi que les constantes  $C_1$  et  $C_2$  pour rendre les termes 2.13 négligeables, dépendent de l'expérience considérée. (Un potentiel peut avoir un effet négligeable sur les résultats d'une expérience si le temps de celle-ci est court, mais ne plus l'avoir pour ce même type d'expérience sur un temps « long »).

### Les $\varepsilon$ -approximations pour les potentiels

Comme on le verra dans la section 2.14, il faudra, pour retrouver l'interprétation probabiliste de la fonction d'état  $\Psi$ , que les éléments de volume relatifs aux métriques des potentiels, restreintes aux « sous-variétés d'espace », soient proches de ceux de la métrique  $g_0$ , elle-même restreinte à ces sous-variétés. Ceci se traduit par le fait que, dans le système de coordonnées standard, le déterminant de la matrice  $M_{g_{\mathcal{P}_r}}$  est proche de celui de  $M_{g_{0r}}$  lorsque  $g_{\mathcal{P}_r}$  est la métrique « restreinte à la sous-variété de genre espace » du potentiel. La métrique  $g_{\mathcal{P}}$  du potentiel est en général de la forme  $g_{\mathcal{P}} = g_0 + h$ . Dans les exemples de potentiels que l'on a donnés,  $\det M_{g_{\mathcal{P}_r}}$  est proche de  $\det M_{g_{0r}}$  si, dans le système de coordonnées standard :  $|h_{ij}| \ll 1$ , ce qui s'écrit pour le potentiel actif sans électromagnétisme :  $|v| \ll 1$  et pour le potentiel électromagnétique :  $|\Upsilon_k| \ll 1$  pour  $k$  de 0 à 3.

D'autre part, si l'on regarde les équations de Schrödinger 2.11 et 2.12, les termes « comparables » sont :

$$M \frac{\partial \Psi}{\partial t}, \quad v M^2, \quad Q^2 \Upsilon_{1,2,3}^2, \quad M Q \Upsilon_0. \quad (2.33)$$

De même, d'après l'expression 3. de 2.13,  $Q \frac{\partial^2 \Upsilon_0}{\partial t}$  est comparable à  $Q^2 \Upsilon_0^2$ .

Si l'on considère valides les  $\varepsilon$ -approximations sur  $\Psi$  données par 2.32, il est naturel, pour que les termes de l'expression 2.33 soient tous du même ordre en  $\varepsilon$ , de donner la définition suivante.

*Définition 35.* On considère un domaine de type « métrique oscillante élémentaire d'ordre 1 dans un potentiel » pour lequel la fonction d'état associée, relative à une carte de l'atlas d'observation, est notée  $\Psi$ .

On dira que **les potentiels vérifient les  $\varepsilon$ -approximations** si il existe un réel  $0 < \varepsilon < 1$  tel que les suites d'inégalités 1. et 2. suivantes soient vérifiées :

1.  $|v| < \varepsilon^2$ ,  $|Q \Upsilon_0| < M \varepsilon^2$ ,  $|Q \Upsilon_{1,2,3}| < M \varepsilon$ .
2.  $|Q \frac{\partial^2 \Upsilon_0}{\partial t}| < M^2 \varepsilon^4$ , il existe une constante  $C$  telle que, pour  $k$  de 0 à 3 :  $|Q \frac{\partial^2 \Upsilon_0}{\partial x^k \partial t}| < C M^2 \varepsilon^4$ , dont le choix est basé sur le même principe que celui utilisé pour les constantes  $C_1$  et  $C_2$  de la définition 34.

Les trois inégalités de la partie 1. de cette définition sont suffisantes pour estimer la différence entre les éléments de volume relatifs aux métriques  $g_P$  et  $g_O$  restreintes aux « sous-variétés de genre espace » définies rigoureusement dans la section suivante.

Les inégalités données dans les définitions 34 et 35 permettent de montrer, lorsque  $\varepsilon \ll 1$  et les constantes  $C_1, C_2$  sont bien choisies, que les termes 2.13 apparaissent dans les équations 2.20, 2.21, 2.22 exactement comme des termes de potentiel standard dans les équations de Schrödinger et que ceux-ci sont « négligeables ».

Dans la suite, nous dirons simplement qu'un domaine de type « métrique oscillante élémentaire d'ordre 1 dans un potentiel » **vérifie les  $\varepsilon$ -approximations** si les inégalités données dans les définitions 34 et 35 sont vérifiées avec  $\varepsilon \ll 1$ .

### L'utilisation rigoureuse des $\varepsilon$ -approximations.

On considère une expérience pour laquelle le domaine d'espace-temps est de type « métrique oscillante élémentaire d'ordre 1 dans un potentiel ».

On suppose que les potentiels vérifient les  $\varepsilon$ -approximations (def. 35) avec  $\varepsilon \ll 1$  (ceci est une donnée de l'expérience) et que, pour des conditions aux limites données, l'équation 2.20 ou 2.21 ou 2.22 admet une unique solution  $\Psi$  (cette équation est d'ordre 2 en  $t$ ). Si l'on constate que  $\Psi$  vérifie les  $\varepsilon$ -approximations (def. 34) avec  $\varepsilon \ll 1$ , alors les considérations exposées précédemment permettent de dire que  $\Psi$  est très proche de la solution  $\Psi'$  de l'équation de Schrödinger correspondante 2.10 ou 2.11 ou 2.12 pour des conditions aux limites compatibles avec les précédentes et qui assurent l'unicité de  $\Psi'$  (l'équation de Schrödinger est d'ordre 1 en  $t$ ).

Le procédé d'utilisation des  $\varepsilon$ -approximations que l'on vient de présenter est en fait purement théorique car, en pratique, la détermination exacte de  $\Psi$  est, hormis les cas triviaux, très difficile à obtenir. L'objectif principal de cette section était en fait de montrer que la description des expériences qui, avec notre « regard » sur la physique, utilise les équations du théorème 4, vont bien donner dans la plupart des cas la même description que celle obtenue par la physique quantique classique.

## 2.13 Les singularités

Il s'avère nécessaire, pour décrire complètement les expériences qui, classiquement, utilisent la notion de « particules », d'introduire une notion de « localisation » pour les domaines de type « métrique oscillante ». Cette localisation correspond expérimentalement aux phénomènes « d'impacts » sur un écran, de « traces » dans une chambre à bulles, à dérive, à fils, etc.

Nous commençons dans la première partie de cette section, par définir les objets « simples » (les singularités) qui suffisent à décrire qualitativement et quantitativement les résultats des expériences classiques de la physique quantique (particules dans un potentiel, diffraction, fentes de Young, expériences de type Stern-Gerlach, intrication quantique, etc.). Comme ce texte n'ira pas plus loin dans la théorie qui suffit à cette description, le lecteur pourra se contenter de la première partie de cette section et passer directement à la section suivante. Cependant, dans le but d'étudier ensuite des phénomènes beaucoup plus délicats que sont, par exemple, ce que l'on

appelle classiquement « les interactions de particules entre elles » nous allons, dans la deuxième partie de cette section, donner un point de vue plus précis sur la notion de singularité. Actuellement, la description de ces derniers phénomènes est abordée par la T.Q.C. Le parallèle entre la théorie présentée ici et la T.Q.C a été succinctement présenté dans la remarque 21.

### 2.13.1 Les singularités vues « simplement »

On considère un domaine  $(\mathcal{D}, g)$  représentant un certain type géométrique (un domaine à courbure scalaire constante conforme à un potentiel, par exemple) pour lequel la signature de  $g$  est partout  $(-, +, +, +, -, +, \dots, +)$ .

*Définition 36.* Un triplet  $(\mathcal{D}, g, \mathcal{S})$ , où  $\mathcal{S}$  est une partie non vide et de mesure nulle de  $\mathcal{D}$ , sera appelé **un domaine avec singularités**. L'ensemble  $\mathcal{S}$  sera appelé **la partie singulière de  $\mathcal{D}$** .

*Définition 37.* On considère un domaine avec singularités  $(\mathcal{D}, g, \mathcal{S})$  et  $\mathcal{H}$  une sous-variété de genre espace de dimension  $n - 2$  (dimension maximale donc).

Les parties connexes de  $\mathcal{H} \cap \mathcal{S}$  seront appelées **les singularités élémentaires de  $\mathcal{H}$** .

Il est tentant de dire que les singularités élémentaires de  $\mathcal{H}$  ne sont autres que les « particules » (au sens classique) qui se trouvent dans  $\mathcal{H}$ . Cependant, aucune loi ne sera donnée sur le comportement de ces singularités élémentaires et l'on supposera seulement que la répartition de celles-ci dans  $\mathcal{H}$  est aléatoire relativement à la métrique  $g$ , cette notion sera bien sûr précisée dans la section suivante.

Remarquons de plus que les grandeurs caractéristiques habituellement associées aux « particules » (masse, charge électrique, spin, impulsion, etc.) sont pour nous, comme on l'a déjà dit, des caractéristiques **de la métrique  $g$  du domaine  $\mathcal{D}$**  (qui sera en général du type « métrique oscillante dans un potentiel ») et ne sont absolument pas associées aux « singularités ». Ceci est profondément différent des points de vue des autres théories physiques actuelles.

Il est à noter que les singularités élémentaires ne sont pas nécessairement des points de  $\mathcal{H}$  mais seulement des parties connexes dont le diamètre de chacune est parfaitement défini relativement à  $g_{\mathcal{H}}$  qui est, en chaque point de  $\mathcal{H}$ , un produit scalaire puisque celui-ci est de genre espace.

La notion de singularité que l'on vient de présenter a été introduite par la donnée d'un « objet ajouté » (la partie singulière  $\mathcal{S}$ ) à la structure de la variété pseudo-riemannienne  $(\mathcal{D}, g)$ . Il est cependant concevable que cette partie singulière soit simplement une caractéristique du tenseur pseudo-riemannien se trouvant dans  $\mathcal{D}$ , noté maintenant  $g_{\mathcal{S}}$ , et que celui-ci ne soit pas défini sur la partie  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{D}$ . Le tenseur pseudo-riemannien  $g_{\mathcal{S}}$  serait alors « très proche » du tenseur  $g$  donné dans la définition 36, sauf sur un voisinage de la partie  $\mathcal{S}$  pour lequel la connaissance du comportement asymptotique de  $g_{\mathcal{S}}$  (relatif à  $g$ ) permettrait d'aborder précisément l'étude de certains « phénomènes d'interaction ». Ce point de vue est justifié dans le paragraphe suivant. On y montre que les domaines de type « métrique oscillante » peuvent être très proches des domaines de type « fluide » présentés dans la section 1.2 et que des « effondrements » de parties de ces domaines en singularités peuvent être justifiés par des calculs analogues à ceux utilisés en relativité générale standard qui décrivent « l'effondrement » de certains domaines de type « fluide » en singularités (trous noirs par exemple). Le tenseur  $g_{\mathcal{S}}$  peut alors être considéré

comme le résultat de « l'évolution » du tenseur  $g$  représentant une « métrique oscillante » après certains « effondrements locaux » (le mot « évolution » demande à être précisé). La partie singulière  $\mathcal{S}$  de  $\mathcal{D}$  présentée dans la définition 36 est alors la partie sur laquelle le tenseur  $g$  (devenu  $g_{\mathcal{S}}$ ) n'est plus défini.

### 2.13.2 Les singularités vues comme des effondrements de métriques oscillantes

Considérons un domaine de type « métrique oscillante homogène dans un potentiel neutre » ayant une vitesse de propagation constante (def. 29). La fonction  $a$  est de la forme  $a = \varphi\beta$  où  $\varphi = C \cos(M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k + C')$  et  $\beta \in E_W(\mu)$  (on suppose ici pour simplifier que  $Q^+ = 0$ ).

On s'intéresse au cas particulier pour lequel  $\beta = C^{te}$  qui correspond à un domaine de type « métrique oscillante » associé à la notion de « champ de Higgs » comme on le verra dans la section 2.17.

La métrique pseudo-riemannienne  $g$  est donc de la forme  $g = |\varphi|^{4/n-2} g_0$ .

D'après l'équation fondamentale d'une métrique oscillante :  $\square_{g_0} \varphi + S \varphi = 0$ .

On a donc :  $(\sum_{k=1}^3 \lambda_k^2 - M'^2) \varphi + S \varphi = 0$  d'où :  $S = M'^2 - \sum_{k=1}^3 \lambda_k^2$ .

La proposition suivante permet de faire le lien entre des domaines de type « métrique oscillante » et de type « fluide », elle se démontre simplement en partant de l'expression standard de la courbure de Ricci lors d'un changement conforme de la métrique  $g = |a|^{\frac{4}{n-2}} g_0$  : sur l'ouvert où  $a$  ne s'annule pas,

$$R_{ij}(g) = R_{ij}(g_0) + \frac{2n}{n-2} a^{-2} \nabla_i a \nabla_j a - 2a^{-1} \nabla_i \nabla_j a - \frac{2}{n-2} a^{-2} (\nabla^i a \nabla_i a + a \nabla^i \nabla_i a) g_{0ij}$$

où les dérivées covariantes  $\nabla_i$  sont relatives à  $g_0$ .

*Proposition 9. Pour le domaine de type « métrique oscillante » que l'on vient de présenter, la courbure de Ricci vérifie :*

$$1. \text{ Si } S := \frac{n-2}{4(n-1)} S_{g_0} > 0 :$$

$$\begin{aligned} R_{icc}^\#(g) &= R_{icc}^\#(g_0) + S \alpha_1 X_0 \otimes X_0 + S \alpha_2 g_0 \\ \text{où } \alpha_1 &:= 2\left(\frac{n}{n-2} \tan^2 z + 1\right) \text{ et } \alpha_2 := \frac{2}{n-2} (\tan^2 z - 1) \\ \text{avec } z &:= M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k + C'. \\ X_0 &= S^{-1/2} (M' \partial_t - \sum_{k=1}^3 \lambda_k \partial_k) \text{ et } g_0(X_0, X_0) = 0 \end{aligned}$$

$$2. \text{ Si } S_{g_0} = 0 :$$

$$\begin{aligned} R_{icc}^\#(g) &= R_{icc}^\#(g_0) + S \alpha_1 X \otimes X \\ \text{où } X &= M' \partial_t - \sum_{k=1}^3 \lambda_k \partial_k \text{ et } g_0(X, X) = g(X, X) = 0. \end{aligned}$$

De plus,  $D_g X = 0$ , en particulier  $X$  est un champ géodésique pour  $g$ .

On remarque que, lorsque  $S > 0$ , la courbure de Ricci se met sous la forme :

$$R_{icc}^\#(g) = \alpha'_1 X'_0 \otimes X'_0 - S \alpha'_2 Y \otimes Y + S \alpha'_2 (Y \otimes Y + X'_0 \otimes X'_0 + g) + R_{icc}^\#(g_0)$$

où l'on a posé  $X'_0 = (\cos^{2/n-2} z) X_0$ .

Alors,  $g(X'_0, X'_0) = -1$ ,  $R_{icc}^\#(g_0)(X'_0, X'_0) = 0$ , (on a aussi  $g(Y, Y) = -1$ ).

Comme  $S_g = 0$  puisque  $\square_{g_0} \varphi + S \varphi = 0$ , le tenseur  $G$  vérifie  $G = 2R_{icc}(g)$ .

**Le domaine est alors de type « fluide »** d'après la définition 10. La fonction densité d'énergie est  $S\alpha'_1$ , elle est positive. Le champ de vecteurs apparent du fluide est  $X'_0$  (ici non géodésique). La pression apparente est  $S\alpha'_2(Y \otimes Y + X'_0 \otimes X'_0 + g)$ . La pression cachée est  $R_{icc}(g_0)$ .

Lorsque  $S = 0$ , le domaine est de type « fluide lumière » puisque  $g(X, X) = 0$  et dans ce cas  $X$  est un champ géodésique. Ce dernier domaine est comparable à celui de type « potentiel actif sans électromagnétisme » présenté en 1.4.2 pour lequel  $R_{icc}^\sharp(g) = (\Delta_{g_0} \nu)X_1 \otimes X_1 + R_{icc}^\sharp(g_0)$  où  $\nu$  est la fonction potentiel,  $X_1$  est de genre lumière et  $D_g X_1 = 0$ . On remarquera cependant que le champ de vecteurs  $X_1$  était tangent à  $I \times W$  alors que le champ  $X$  est tangent à l'espace « apparent »  $\Theta$ .

Les phénomènes d'effondrement d'un fluide massique en une singularité (un trou noir par exemple) sont décrits en relativité générale classique. Ils peuvent se voir mathématiquement comme une conséquence du théorème de Raychaudhuri qui dit que, sous certaines hypothèses, « l'expansion  $\Theta$  » d'un champ de vecteurs géodésique  $X$  caractérisant le fluide, tend vers  $-\infty$  en un temps fini. Nous allons voir que ce même phénomène se décrit simplement (même en grande dimension) pour tout champ géodésique  $X$  de genre lumière, lorsque la courbure de Ricci du domaine considéré est de la forme  $R_{icc}^\sharp(g) = \alpha X \otimes X + P$  avec  $R_{icc}(X, X) \geq 0$ , ce qui est le cas pour les métriques oscillantes que l'on vient de décrire ou pour un potentiel actif sans électromagnétisme.

On considère les caractéristiques classiques d'un champ de vecteurs géodésique  $X$  que sont : l'expansion  $\Theta$ , la vorticité  $\omega$ , la déformation  $\sigma$  dont on ne rappelle pas les définitions ici.

Le théorème de Raychaudhuri, en dimension  $n$  et pour une signature de  $g$  de la forme  $(-, +, +, +, -, \dots, +)$ , dit que : si  $\beta$  est une géodésique de genre lumière paramétrée par  $s$ , telle que  $\beta(s) = X_{\beta(s)}$ , alors l'égalité suivante est vérifiée :

$$(\Theta_{\beta(s)})'_s = -R_{icc}(X_{\beta(s)}, X_{\beta(s)}) + 2\omega_{ij}\omega_{\beta(s)}^{ij} - 2\sigma_{ij}\sigma_{\beta(s)}^{ij} - \frac{1}{n-2}\Theta_{\beta(s)}^2 \quad (2.34)$$

On en déduit facilement la proposition suivante :

**Proposition 10.** *On suppose que la vorticité  $\omega$  du champ  $X$  est nulle et que, pour une valeur  $s_0$  du paramètre :  $\Theta_{\beta(s_0)} < 0$ .*

*Alors il existe  $s_1$  vérifiant  $s_0 < s_1 \leq s_0 + (n-2)|\Theta(\beta(s_0))|^{-1}$  tel que l'expansion  $\Theta_{\beta(s)}$  tende vers  $-\infty$  lorsque  $s$  converge vers  $s_1$  par valeurs inférieures.*

**Démonstration :** Comme  $R_{icc}^\sharp(g) = \alpha X \otimes X + R_{icc}^\sharp(g_0)$  et que  $X$  est de genre lumière,  $R_{icc}(g)(X_{\beta(s)}, X_{\beta(s)}) = 0$  puisque  $R_{icc}(g_0)(X, X) = 0$ . Alors, comme la vorticité est nulle, le théorème de Raychaudhuri montre que :

$$(\Theta_{\beta(s)})'_s \leq \frac{-1}{n-2}\Theta_{\beta(s)}^2.$$

Lorsque  $\Theta_{\beta(s)} \neq 0$  on a :  $(\Theta^{-1}(\beta(s)))'_s \geq \frac{1}{n-2}$ , d'où, pour  $s \geq s_0$  :

$$\Theta_{\beta(s)}^{-1} - \Theta_{\beta(s_0)}^{-1} \geq \frac{1}{n-2}(s - s_0).$$

Comme  $\Theta_{\beta(s)}^{-1}$  est croissante en  $s$  et est négative pour  $s = s_0$ ,  $\Theta_{\beta(s)}^{-1}$  converge vers 0 lorsque  $s$  converge vers  $s_1 \leq s_0 + (n-2)|\Theta(\beta(s_0))|^{-1}$ .

La proposition que l'on vient de montrer décrit, sous la condition de nullité de la vorticité, un éventuel « effondrement » en une singularité des géodésiques engendrées par le champ

$X$ , ceci pour une valeur finie du paramètre  $s$ , sous la condition que l'expansion  $\Theta$  prenne des valeurs négatives. En fait, l'égalité 2.34 montre que ce phénomène peut avoir lieu sous des hypothèses bien plus faibles, et il n'est pas nécessaire de supposer la nullité de la vorticité ou de  $Ricc(X, X)$  puisque seule l'inégalité  $(\Theta_{\beta(s)})'_s \leq \frac{-1}{n-2} \Theta^2(\beta(s))$  est utilisée. Cela laisse supposer que le phénomène « d'effondrement » d'une métrique oscillante en une singularité a lieu pour des métriques oscillantes bien plus générales que celles dont  $R_{icc}^\#(g)$  est de la forme  $\alpha X \otimes X + P$ . La démonstration de la proposition 10 montre que c'est le fait que l'expansion  $\Theta$  soit négative en un certain domaine qui « provoque » le phénomène d'effondrement. Il est très concevable que seule une partie de la métrique oscillante s'effondre en une singularité et que l'on obtienne alors un domaine « métrique oscillante avec singularités ».

Des précisions sur le comportement asymptotique de la métrique  $g$  au voisinage d'une singularité n'aura d'importance que pour l'étude de phénomènes plus complexes. Pour les phénomènes physiques décrits dans ce papier jusqu'à la section 2.21, seule la « localisation » des singularités (aléatoire relativement à  $g$ ) sera utilisée. Ceci est le sujet de la section suivante.

## 2.14 La partie probabiliste

Dans l'axiomatique que l'on a choisie pour représenter l'espace-temps, les singularités (cf. section précédente) vont être considérées n'être régies par aucun principe ou aucune loi. Le fait que, dans les expériences génériques de la physique quantique (diffraction, fentes de Young, ..., etc.), les singularités n'apparaissent pas équiprobablement réparties sur « l'écran » (on considère que ce sont les singularités qui laissent des traces sur l'écran) **n'est pas dû à des lois qui régiraient ces singularités, mais seulement à la déformation de la métrique pseudo-riemannienne  $g$  dans la partie de l'espace-temps où elles se trouvent, relative à la métrique  $g_0$  utilisée lors de la mesure des résultats de l'expérience.** C'est bien un processus probabiliste que l'on va utiliser pour décrire les résultats de ces expériences et montrer que l'on obtient, sous certaines approximations, des résultats identiques à ceux de la physique quantique standard, ceci sans avoir recours à la moindre procédure ou axiomatique de cette dernière.

On considère un domaine avec singularités  $(\mathcal{D}, g, \mathcal{S})$  (def. 36).

**Le fait qu'aucune loi ne régisse les singularités de  $\mathcal{D}$  est traduit mathématiquement de la manière suivante :**

Toute sous-variété  $\mathcal{H}$  de  $\mathcal{D}$  de genre espace et de dimension  $n - 2$  (de dimension maximale donc) vérifie les deux propriétés suivantes :

1. Si  $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$  sont deux parties de  $\mathcal{H}$  de volumes finis relatifs à la métrique riemannienne  $g_{\mathcal{H}}$ .  
Si «  $\varsigma$  » est une singularité élémentaire dans  $\mathcal{H}_1$  (def. 25), alors la probabilité qu'elle soit dans  $\mathcal{H}_2$  est :

$$p = \text{vol}_{g_{\mathcal{H}}}(\mathcal{H}_2) / \text{vol}_{g_{\mathcal{H}}}(\mathcal{H}_1) \quad (2.35)$$

Autrement dit, la densité de probabilité de présence de la singularité «  $\varsigma$  » dans  $\mathcal{H}_2$  est la densité uniforme donnée par la  $(n - 2)$ -forme différentielle sur  $\mathcal{H}_1$  définie par

$\sigma = (\text{vol}_{g_{\mathcal{H}}}(\mathcal{H}_1))^{-1} dv_{g_{\mathcal{H}}}$  où  $dv_{g_{\mathcal{H}}}$  désigne classiquement la  $(n-2)$ -forme de volume riemannienne sur  $(\mathcal{H}, g_{\mathcal{H}})$ .

(Lorsque  $(v^1, \dots, v^{n-2})$  est un système de coordonnées sur  $\mathcal{H}$ , la forme de volume s'écrit :  $dv_{g_{\mathcal{H}}} = \sqrt{\det g_{\mathcal{H}}} dv^1 \dots dv^{n-2}$  où  $\det g_{\mathcal{H}}$  est le déterminant de la matrice de  $g_{\mathcal{H}}$  dans le système de coordonnées).

2. Si  $\varsigma_1, \dots, \varsigma_N$  sont  $N$  singularités élémentaires dans  $\mathcal{H}_1$ , alors la probabilité que  $k$  d'entre elles soient dans  $\mathcal{H}_2$  est :

$$p(N, k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k} \quad (2.36)$$

où  $p = \text{vol}_{g_{\mathcal{H}}}(\mathcal{H}_2) / \text{vol}_{g_{\mathcal{H}}}(\mathcal{H}_1)$  et  $q = 1 - p$

Autrement dit, la loi de probabilité associée est une loi binomiale. Ceci traduit le fait que la présence d'une singularité élémentaire dans  $\mathcal{H}$  n'a pas d'influence sur la présence des autres.

On remarquera que les propriétés 1. et 2. ne sont pas liées au choix d'une carte du g-atlas d'observation.

Les propriétés 1. et 2. sont exactement celles qui correspondent à l'expérience consistant à lancer aléatoirement des objets ponctuels sur une surface  $\mathcal{H}_1$  et à regarder les probabilités d'arrivée de ces objets sur une surface  $\mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_1$  (mais pour nous, bien sûr,  $\mathcal{H}_2$  et  $\mathcal{H}_1$  sont de dimension  $n-2$  et la métrique est  $g_{\mathcal{H}_1}$ ).

On considère maintenant une carte de l'atlas d'observation pour laquelle la cellule type  $(\mathcal{C}, g)$  est celle d'une métrique oscillante dans un potentiel (def. 20) :  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  et  $g = |a|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}}$ . ( $\Theta$  sera supposé de la forme  $I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ).

On « fixe »  $(t, u) \in \mathbb{R} \times S^1(\delta)$  (temps « double »).

Soient  $\mathcal{H}_{2(t,u)} \subset \mathcal{H}_{1(t,u)} \subset \mathcal{C}$  de la forme :

$$\mathcal{H}_{2(t,u)} = \{t\} \times \omega \times \{u\} \times W \subset \mathcal{C}$$

$$\mathcal{H}_{1(t,u)} = \{t\} \times \Omega \times \{u\} \times W \subset \mathcal{C}$$

où  $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$  sont deux domaines de  $\mathbb{R}^3$ .

Pour visualiser les choses, le lecteur pourra supposer que  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  est un domaine représentant un écran (avec une épaisseur) et  $\omega$  un sous-domaine de cet écran lors d'une expérience standard qui consiste à étudier la répartition des impacts de « particules » sur l'écran, lorsque celles-ci sont envoyées au travers d'un potentiel  $\mathcal{P}$ .

$\mathcal{H}_{2(t,u)}$  et  $\mathcal{H}_{1(t,u)}$  sont des sous-variétés de genre espace de dimension  $n-2$  pour les deux métriques  $g$  et  $g_0$ .

D'après 2.35, lorsque «  $\varsigma$  » est une singularité élémentaire dans  $\mathcal{H}_{1(t,u)}$ , la probabilité qu'elle se trouve dans  $\mathcal{H}_{2(t,u)}$  est :

$$P(t, u) = \int_{\mathcal{H}_{2(t,u)}} dv_{g_{\mathcal{H}_{1(t,u)}}} / \int_{\mathcal{H}_{1(t,u)}} dv_{g_{\mathcal{H}_{1(t,u)}}} \quad (2.37)$$

Dans un système de coordonnées standard de  $\mathcal{C}$ , ceci s'écrit :



$$P_{(t,u)} = \int_{\mathcal{H}_{2(t,u)}} \sqrt{\det(g_{\mathcal{H}_{1(t,u)}})} dx^i dv^j / \int_{\mathcal{H}_{1(t,u)}} \sqrt{\det(g_{\mathcal{H}_{1(t,u)}})} dx^i dv^j$$

$$(\text{ici } dx^i dv^j := dx^1 dx^2 dx^3 dv^1 \dots dv^{n-5})$$

d'où :

$$P_{(t,u)} = \int_{\mathcal{H}_{2(t,u)}} a_{(t,u)}^2 \sqrt{\det(g_{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{1(t,u)}}})} dx^i dv^j / \int_{\mathcal{H}_{1(t,u)}} (idem) \quad (2.38)$$

**On remarquera ici l'importance de la signature de  $g$  qui compte deux signes «  $-$  » et  $(n-2)$  signes «  $+$  », car c'est ce fait qui permet d'obtenir l'exposant « 2 » sur la fonction  $a$  puisque la dimension de  $\mathcal{H}_1$  est alors égale à  $(n-2)$  et par conséquent :**  $\sqrt{\det(|a|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{1(t,u)}}})} = a^2 \sqrt{\det(g_{\mathcal{P}_{\mathcal{H}_{1(t,u)}}})}$ . (l'exposant « 2 » sur la fonction  $a$  est particulièrement important pour la suite).

On suppose maintenant que la métrique  $g_{\mathcal{P}}$  est « suffisamment » proche de  $g_0$ , autrement dit que les « fonctions potentiel » qui interviennent dans  $g_{\mathcal{P}}$  sont « 1 ». On peut alors écrire :

$$P_{(t,u)} \simeq \int_{\mathcal{H}_{2(t,u)}} a_{(t,u)}^2 \sqrt{\det(g_{0\mathcal{H}_{1(t,u)}})} dx^i dv^j / \int_{\mathcal{H}_{1(t,u)}} (idem) \quad (2.39)$$

Une estimation de l'erreur dans « l'égalité »  $\simeq$  précédente peut être faite en utilisant les définitions précises des  $\varepsilon$ -approximations sur les potentiels (def. 35), mais ce n'est pas à cela que nous nous intéressons ici.

Examinons maintenant le cas d'une métrique oscillante **élémentaire** d'ordre 1 (def. 27) pour laquelle, par définition :

$$a = \varphi\beta \quad \text{où } \varphi : \Theta \times S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R} \text{ vérifie : } \varphi = \varphi_1 \cos(Q^+u) + \varphi_2 \sin(Q^+u)$$

Ici  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont deux fonctions réelles définies sur  $\Theta$  et  $\beta \in E_W(\mu)$ .

On rappelle que la fonction canonique  $a_c$  est définie par  $a_c = \varphi_1 + i\varphi_2$ .

(Le cas des métriques oscillantes élémentaires d'ordre 2 se traite d'une manière similaire mais ne sera présenté, pour la clarté de l'exposé, que dans la section concernant le « spin ». Le processus se généralise en fait sans difficultés à l'ordre  $k > 2$  suivant la décomposition de  $W$  en produit de variétés compactes).

Comme  $g_0$  est une métrique « produit », 2.39 s'écrit :

$$P_{(t,u)} = (\int_{\omega} \varphi_{(t,x,u)}^2 dv_{g_{0|\omega}}) (\int_W \beta^2 dv_{g_{0|W}}) / (\int_{\Omega} \varphi_{(t,x,u)}^2 dv_{g_{0|\Omega}}) (\int_W \beta^2 dv_{g_{0|W}})$$

où l'intégrale de  $\beta^2$  sur  $W$  se simplifie.

On obtient donc :

$$P_{(t,u)} \simeq \int_{\omega} (\varphi_{1(t,x,u)}^2 \cos^2(Q^+u) + \varphi_{2(t,x,u)}^2 \sin^2(Q^+u) + 2\varphi_1\varphi_2 \cos(Q^+u) \sin(Q^+u)) dx^1 dx^2 dx^3 / \int_{\Omega} (idem) \quad (2.40)$$

Dans le cas particulier où  $Q^+ = 0$ , la fonction canonique  $a_c$  n'est autre que la fonction  $\varphi_1$ . « L'égalité » précédente s'écrit alors :

$$p_{(t,u)} = p_{(t)} \simeq \int_{\omega} \varphi_1^2(t,x) dx^i / \int_{\Omega} \varphi_1^2(t,x) dx^i$$

d'où :

$$p_{(t)} \simeq \int_{\omega} |a_c|_{(t,x)}^2 dx^i / \int_{\Omega} |a_c|_{(t,x)}^2 dx^i$$

Lorsque  $Q^+$  est strictement positif, il est intéressant de considérer les « moyennes » sur le « temps »  $u \in S^1(\delta)$ , ce qui revient à supposer que les variations en  $u$  de  $p_{(t,u)}$  donné en 2.40 ne sont pas perceptibles en pratique.

On suppose donc que, pour un observateur « lié » au système de coordonnées standard de la cellule  $\mathcal{C}$ , la densité de probabilité de présence d'une singularité  $\varsigma$  dans  $\mathcal{H}_{2(t)} := \{t\} \times \omega \times S^1(\delta) \times W$  est uniforme relativement au temps  $u \in S^1(\delta)$ , ce que l'on traduit de la manière suivante :

Lorsque, pour  $t \in \mathbb{R}$ , «  $\varsigma$  » est une singularité élémentaire dans  $\mathcal{H}_{1(t)} := \{t\} \times \Omega \times S^1(\delta) \times W$ , la probabilité pour que celle-ci soit dans  $\mathcal{H}_{2(t)}$  est :

$$p_{(t)} \simeq \int_{\mathcal{H}_{2(t)}} \sqrt{\det(g_{\mathcal{H}_{1(t,u)}})} du dx^i dv^j / \int_{\mathcal{H}_{1(t)}} \sqrt{\det(g_{\mathcal{H}_{1(t,u)}})} du dx^i dv^j \quad (2.41)$$

Dans le cas d'une métrique oscillante élémentaire d'ordre 1 et avec les mêmes approximations que celles décrites précédemment, 2.41 devient (en partant de 2.40) :

$$p_{(t)} \simeq \int_{\omega \times S^1(\delta)} (*) dx^i du / \int_{\Omega \times S^1(\delta)} (*) dx^i du$$

où  $(*) = \varphi_1^2(t,x,u) \cos^2(Q^+u) + \varphi_2^2(t,x,u) \sin^2(Q^+u) + 2\varphi_1\varphi_2(t,x,u) \cos(Q^+u) \sin(Q^+u)$

d'où, puisque :

$$\int_{S^1(\delta)} \cos^2(Q^+u) du = \int_{S^1(\delta)} \sin^2(Q^+u) du = \pi\delta \quad \text{et} \\ \int_{S^1(\delta)} \cos(Q^+u) \sin(Q^+u) du = 0 :$$

$$p_{(t)} \simeq \int_{\omega} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)_{(t,x)} dx^i / \int_{\Omega} (\varphi_1^2 + \varphi_2^2)_{(t,x)} dx^i$$

Et l'on retrouve l'expression que l'on avait obtenue dans le cas particulier pour lequel  $Q^+$  était nul :

$$p_{(t)} \simeq \int_{\omega} |a_c|_{(t,x)}^2 dx^i / \int_{\Omega} |a_c|_{(t,x)}^2 dx^i \quad (2.42)$$

Bien entendu, une singularité  $\varsigma$  dans  $\mathcal{H}_{1(t)}$  (resp.  $\mathcal{H}_{2(t)}$ ) est vue « en pratique » dans  $\Omega$  (resp.  $\omega$ ) au temps  $t$  par l'observateur lié au système de coordonnées.

Les probabilités données par les égalités 2.36 s'étendent aussi au cas « moyennisé sur  $S^1(\delta)$  » et on laisse au lecteur la formulation précise du résultat.

Considérons le cas particulier où la métrique oscillante élémentaire a une charge électrique bien définie (def. 31). La fonction d'état  $\Psi$  est alors elle-même bien définie (def. 33) et on a  $|\Psi| = |a_c|$ . La probabilité  $p_{(t)}$  donnée par 2.42 s'écrit donc aussi :

$$p_{(t)} \simeq \int_{\omega} |\Psi|_{(t,x)}^2 dx^i / \int_{\Omega} |\Psi|_{(t,x)}^2 dx^i \quad (2.43)$$

On retrouve ici un des axiomes principaux de la physique quantique classique à la différence cependant que le dénominateur  $\int_{\Omega} |\Psi|_{(t,x)}^2 dx^i$  peut dépendre de «  $t$  ». Ce fait ne pose aucun problème conceptuel dans la physique présentée ici contrairement à la physique quantique standard, et on rappelle qu'une « singularité » n'est pas du tout une notion équivalente à celle de « particule » (cf l'introduction du chapitre 2).

Si l'on suppose la validité des  $\varepsilon$ -approximations, on a vu que la fonction d'état  $\Psi$  vérifie (en approximation) les équations classiques de Schrödinger qui sont de la forme  $i\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H(\Psi)$  où  $H$  est un opérateur hermitien, et si  $\Psi$  vérifie de bonnes conditions aux limites on en déduit classiquement que  $\partial(\int_{\Omega} |\Psi|^2) / \partial t = 0$  et qu'alors  $\int_{\Omega} |\Psi|^2$  ne dépend pas de «  $t$  ». On peut alors, comme en physique quantique standard, **normaliser** la fonction d'état  $\Psi$  pour que  $\int_{\Omega} |\Psi|^2 = 1$  et l'on retrouve exactement avec 2.43 l'axiome standard considéré. Ce procédé n'est valable que lorsque  $\Psi$  vérifie une équation du type « Schrödinger » (d'ordre 1 en  $t$ ) et ne fonctionne pas pour une équation « complète » de type « Klein-Gordon » qui est d'ordre 2 en  $t$ , mais, comme on l'a déjà dit, ceci ne pose aucun problème conceptuel pour la physique présentée ici.

L'axiome important de la physique quantique donné par 2.43 « normalisé » n'est pour nous qu'une conséquence du fait qu'aucune loi ne régit les singularités sur  $\mathcal{M}$  ce qui se traduit mathématiquement par 2.35 et 2.36 et, dans le cas des métriques oscillantes dans un potentiel, donne 2.38. La probabilité donnée par 2.38 dépend des potentiels, ce qui, en pratique, complique sérieusement les choses, mais, dans le cadre des  $\varepsilon$ -approximations, la dépendance vis à vis de ces potentiels est négligeable et l'on retrouve donc, pour les expériences étudiées par la physique quantique standard, des résultats identiques.

### 2.14.1 La notion de « densité de singularités »

La notion introduite dans cette sous-section n'est en fait pas vraiment indispensable pour la description des expériences de la physique quantique standard, mais elle deviendra utile dans l'étude de phénomènes quantiques décrits actuellement par la T.Q.C. Cette notion de « densité de singularités » va permettre, entre autre, d'aborder quantitativement le problème qui consiste à déterminer le seuil à partir duquel l'équation fondamentale linéaire 2.3 est une bonne approximation de l'équation fondamentale non linéaire 2.2.

On considère, comme précédemment, une sous-variété  $\mathcal{H}$  (d'un domaine  $\mathcal{D}$ ) de genre espace et de dimension  $n - 2$ . Lorsque le nombre de singularités élémentaires dans  $\mathcal{H}$  est « suffisamment grand » on traduit le fait qu'aucune loi ne régit les singularités de  $\mathcal{D}$  (plus précisément, l'équiprobabilité de présence des singularités dans  $\mathcal{H}$  relativement à  $g_{\mathcal{H}}$ ) en posant l'hypothèse suivante :

Il existe une constante  $D$  (la densité) telle que, quels que soient  $N \in \mathbb{N}$  et un domaine

$\mathcal{H}_N \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{D}$  qui contient  $N$  singularités élémentaires, on ait :

$$N(1 + \varepsilon(N)) = Dv_{g_{\mathcal{H}_N}} \quad (2.44)$$

où  $v_{g_{\mathcal{H}_N}}$  désigne le volume relatif à la métrique riemannienne  $g_{\mathcal{H}}$  du domaine  $\mathcal{H}_N$ , et  $\lim \varepsilon(N) = 0$  lorsque  $N$  tend vers l'infini.

On considère une suite de domaines  $(\mathcal{H}_N)_{N>N_0}$  telle que  $v_{g_{\mathcal{H}_N}}$  converge (fictivement) vers l'infini avec  $N$ , et  $\mathcal{H}_1$  un sous-domaine des  $\mathcal{H}_N$ .

D'après 2.36, lorsque  $\varsigma_1, \dots, \varsigma_N$  sont les  $N$  singularités élémentaires dans  $\mathcal{H}_N$ , la probabilité que  $k$  d'entre elles se trouvent dans  $\mathcal{H}_1$  est :

$$p(N, k) = \binom{N}{k} p^k q^{N-k}$$

où  $p = v_1/v_N$ ,  $q = 1 - p$  lorsque l'on a posé  $v_N := v_{g_{\mathcal{H}_N}}$ .

Alors, en utilisant la relation 2.44, on en déduit que :

$$p(N, k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} (v_1/v_N)^k (1 - v_1/v_N)^{N-k} \text{ converge vers } \frac{(Dv_1)^k}{k!} e^{-Dv_1}$$

lorsque  $N$  tend vers l'infini.

On peut donc considérer que, lorsqu'il y a un grand nombre de singularités élémentaires dans  $\mathcal{H}$ , la probabilité d'en trouver  $k$  dans un sous-domaine  $\mathcal{H}_1$  de  $\mathcal{H}$  est :

$$p(k) = \frac{(Dv_1)^k}{k!} e^{-Dv_1} \quad (2.45)$$

(On peut remarquer que l'on a bien  $\sum_{k=0}^{\infty} p(k) = 1$ )

Lorsque  $(\mathcal{C}, g)$  est une cellule de type « métrique oscillante dans un potentiel » pour laquelle  $g = |a|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}}$ , et lorsque l'on admet les  $\varepsilon$ -approximations telles que  $g_{\mathcal{H}(t)}$  soit « proche » de  $|a|^{\frac{4}{n-2}} g_{0, \mathcal{H}(t)}$  comme précédemment, la relation 2.45 montre que, à l'instant «  $t$  » pour un observateur lié à un système de coordonnées standard de  $\mathcal{C}$ , la probabilité que celui-ci trouve  $k$  singularités élémentaires dans  $\mathcal{H}_1(t)$  est  $p(k) = \frac{(Dv_1(t))^k}{k!} e^{-Dv_1(t)}$ .

(En fait, ces singularités sont « vues » dans  $\omega$  lorsque  $\mathcal{H}_1(t) = \{t\} \times \omega \times S^1(\delta) \times W$ )

où ici  $v_1(t) = \int_{\omega \times S^1(\delta) \times W} a^2 dx^i dudv^j$ .

Tout se passe donc comme si la densité de singularités élémentaires **vue par l'observateur lié au système de coordonnées** (qui fait les mesures avec  $g_0$ ) était donnée par la fonction  $Da^2$ .

Si l'on suppose que la fonction  $a^2$  est suffisamment petite devant la constante 1 pour que l'équation linéaire 2.3 vérifiée par la fonction  $a$  soit une bonne approximation de l'équation 2.2, ceci n'est plus nécessairement le cas pour la fonction  $(\lambda a)^2$  où  $\lambda$  est une constante « suffisamment grande », bien que la fonction  $\lambda a$  vérifie encore l'équation linéaire 2.3. D'après les résultats précédents ceci dit simplement que, lorsque la densité de singularités devient grande (elle grandit en  $\lambda^2$ ), l'équation linéaire cesse d'être une bonne approximation et on ne peut plus négliger la partie non linéaire de l'équation 2.2. Cela correspond à l'interprétation de la physique classique qui dit que, lorsque la densité des particules devient grande, on ne peut plus négliger l'interaction des particules entre elles, mais il faut bien comprendre qu'avec le regard que l'on porte ici sur la physique, on ne suppose aucune forme d'interaction entre les singularités, c'est seulement

la métrique oscillante, par l'intermédiaire de la fonction  $a$ , qui tient compte de ce phénomène. Bien entendu, la densité effective des singularités qui apparaît lors d'une expérience dépend des conditions initiales (ou aux limites) de cette expérience.

## 2.15 Le spin

La description des résultats expérimentaux liés aux phénomènes de « spin », traités habituellement par la physique quantique standard, s'avère être naturelle pour nous si l'on considère que, dans la cellule type de la forme  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$ , la variété compacte  $W$  est une variété « produit » de la forme  $S^3(\rho) \times V$  où  $S^3(\rho)$  est la sphère standard de dimension 3, de rayon  $\rho$ , munie (pour décrire les métriques de référence  $g_0$ ) de la métrique riemannienne standard  $g_{S^3(\rho)}$  induite par la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^4$ .

L'étude de  $(S^3(\rho), g_0|_{S^3(\rho)})$  et en particulier celle des espaces propres du laplacien est très importante pour nous et est précisée dans l'annexe 3.8. On en rappelle les points essentiels dans les deux sous-sections qui suivent.

### 2.15.1 Les valeurs propres et les espaces propres du laplacien sur la sphère $S^3(\rho)$ ainsi que ceux liés à la fibration de Hopf

Les espaces propres  $E_{S^3(\rho)}(\gamma_p)$  du laplacien des géomètres ( $\Delta := -\nabla_i \nabla^i$ ) ont pour valeurs propres :

$$\gamma_p = \rho^2 p(p+2) \quad p \in \mathbb{N}$$

On les classera suivant les valeurs croissantes des  $\gamma_p$  en les notant :

$$E_0, E_1, \dots, E_p, \dots \quad (2.46)$$

En fait,  $p/2$  correspondra à « l'indice de spin » de la physique quantique standard.

Il est important de noter que, lorsque  $p$  est **pair**, chaque espace propre  $E_p$  contient un sous-espace vectoriel  $E'_p$  qui s'identifie à l'espace propre  $E_{S^2(\rho/2)}(\gamma_p)$  du laplacien de la sphère standard  $S^2$  de rayon  $\rho/2$  (Annexe 3.8).

Les indices impairs de  $E_p$  correspondent aux espaces propres liés uniquement à  $S^3$  alors que les indices pairs sont liés aux espaces propres de  $S^2$ . Il est intéressant de noter que, **si  $p$  est pair**, les fonctions propres  $\beta \in E_p$  sont invariantes par l'isométrie « antipodale »  $\sigma$  de  $S^3(\rho)$  ( $\beta \circ \sigma = \beta$ ), et changent de signe ( $\beta \circ \sigma = -\beta$ ) **si  $p$  est impair**.

### 2.15.2 Trois champs de vecteurs qui parallélisent $S^3$ et les endomorphismes des espaces propres qui leurs sont canoniquement associés

La sphère  $S^3$  est une variété parallélisable (seules les sphères  $S^1, S^3, S^{15}$  le sont).

On définit classiquement  $S^3(\rho)$  en posant :

$$S^3(\rho) := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \sum_{k=1}^4 x_k^2 = \rho^2\}$$

Soient  $L_1, L_2, L_3$  les trois champs de vecteurs définis sur  $\mathbb{R}^4$  par :

$$\begin{aligned} L_1 &= x_3 \partial_1 + x_4 \partial_2 - x_1 \partial_3 - x_2 \partial_4 \\ L_2 &= -x_4 \partial_1 + x_3 \partial_2 - x_2 \partial_3 + x_1 \partial_4 \\ L_3 &= x_2 \partial_1 - x_1 \partial_2 - x_4 \partial_3 + x_3 \partial_4 \end{aligned} \quad (2.47)$$

où on a noté  $\partial_i$  pour  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ .

En chaque point  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$  ces trois champs de vecteurs sont orthogonaux au vecteur radial  $x_1 \partial_1 + x_2 \partial_2 + x_3 \partial_3 + x_4 \partial_4$  et sont orthogonaux entre eux (ce sont, en quelque sorte, les plus « simples » que l'on puisse écrire dans le système de coordonnées et qui ont ces propriétés).

On note  $L_k|_{S^3}$  les trois champs de vecteurs sur  $S^3(\rho)$  « restrictions » des  $L_k$ . En chaque point  $x \in S^3(\rho)$  les trois vecteurs  $L_k|_{S^3}$  forment une base (orthogonale) de l'espace tangent  $T_x(S^3(\rho))$ . ( $S^3$  est donc bien parallélisable).

$L_1, L_2, L_3$  définissent naturellement (comme opérateurs différentiels) trois endomorphismes de  $C^\infty(\mathbb{R}^4)$  puisque  $\forall f \in C^\infty(\mathbb{R}^4) \quad L_k(f) \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ .

De même,  $L_1|_{S^3}, L_2|_{S^3}, L_3|_{S^3}$  définissent, par restriction, trois endomorphismes de  $C^\infty(S^3(\rho))$ .

La proposition suivante est fondamentale pour la suite. Sa démonstration est donnée dans l'annexe 3.8.4.

*Proposition 11. Les espaces propres  $E_{S^3(\rho)}(\gamma)$  notés  $E_p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) précisés en 2.46 ainsi que les espaces  $E'_q$  ( $q \in 2\mathbb{N}$ ) **sont stables** par chacun des trois endomorphismes définis par  $L_k|_{S^3}$ .*

Ce résultat permet de donner la définition suivante :

*Définition 38. Pour chaque  $E_p$  (resp.  $E'_q$ ), les trois endomorphismes notés  $S_1, S_2, S_3$  (sans faire référence à  $p$  ou à  $q$ ) définis par  $L_k|_{S^3}$  restreints à  $E_p$  (resp.  $E'_q$ ) seront appelés **les endomorphismes canoniques des espaces propres de  $S^3(\rho)$** .*

Comme on l'a déjà vu (prop. 7), les espaces propres du d'alembertien sur  $S^1(\delta) \times S^3(\rho)$  relatifs à la métrique pseudo-riemannienne  $(-g_0|_{S^1}) \times (g_0|_{S^3})$  s'identifient aux  $E_{S^1}(\lambda) \otimes E_{S^3}(\gamma_p)$ . Les valeurs propres correspondantes sont  $(\gamma_p - \lambda)$  où  $\gamma_p = \rho^2 p(p+2)$  et  $\lambda = Q^{+2}$ .

Lorsque  $\lambda \neq 0$ , l'espace propre  $E_{S^1}(\lambda)$  s'identifie à  $\mathbb{C}$  par l'isomorphisme  $\mathbb{C}_\lambda$  (cf. 2.13) et  $E_{S^1}(\lambda) \otimes E_{S^3}(\gamma_p)$  à  $\mathbb{C} \otimes E_p$  (cf. 2.14) qui n'est autre que le complexifié de  $E_p$  que l'on a noté  $E_p^\mathbb{C}$ .

Pour chaque  $E_p$  (resp.  $E'_q$ ) les trois endomorphismes  $S_k$  (def. 38) s'étendent naturellement sur les complexifiés  $E_p^\mathbb{C}$  (resp.  $E'_q{}^\mathbb{C}$ ) en posant :

$$\forall (\varphi_1 + i\varphi_2) \in E_p + iE_p = E_p^\mathbb{C} \quad S_k^\mathbb{C}(\varphi_1 + i\varphi_2) := S_k(\varphi_1) + iS_k(\varphi_2)$$

Cependant, uniquement dans le but de retrouver exactement les endomorphismes qui interviennent en physique quantique standard pour les phénomènes liés au spin, on donne la définition suivante où l'on introduit le coefficient «  $i$  ».

*Définition 39. Pour chaque  $E_p$  (resp.  $E'_q$ ), les trois endomorphismes de  $E_p^\mathbb{C}$  (resp.  $E'_q{}^\mathbb{C}$ ) définis par :  $\hat{S}_k = -iS_k^\mathbb{C}$  seront appelés **les endomorphismes canoniques des espaces propres complexifiés de  $S^3(\rho)$** .*

Le lecteur pourra vérifier que les trois endomorphismes  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$  ont les propriétés suivantes qui ne sont autres que celles vérifiées par les observables de moment cinétique (au facteur  $\hbar$  près) en physique quantique classique :

$$\hat{S}_2\hat{S}_3 - \hat{S}_3\hat{S}_2 = i\hat{S}_1, \quad \hat{S}_1\hat{S}_3 - \hat{S}_3\hat{S}_1 = -i\hat{S}_2, \quad \hat{S}_1\hat{S}_2 - \hat{S}_2\hat{S}_1 = i\hat{S}_3$$

### 2.15.3 Les domaines de type « métrique oscillante avec spin dans un potentiel »

Nous allons ici nous intéresser aux domaines de type « métrique oscillante élémentaire d'ordre 2 dans un potentiel » (def. 27).

Expérimentalement, les effets physiques particuliers liés à la notion de spin apparaissent dans les domaines où « l'électromagnétisme » est présent. Nous allons donc étudier principalement le cas des métriques oscillantes avec spin dans un potentiel **électromagnétique**.

Pour préciser les choses nous donnons la définition suivante :

*Définition 40. Un domaine de type « métrique oscillante élémentaire avec spin dans un potentiel électromagnétique » est un domaine de type « métrique oscillante élémentaire d'ordre 2 (def. 27) pour lequel la métrique pseudo-riemannienne  $g_{\mathcal{P}}$  du potentiel électromagnétique a la forme spécifique présentée dans le paragraphe suivant.*

#### Forme spécifique du potentiel électromagnétique $g_{\mathcal{P}}$

On rappelle que la cellule  $\mathcal{C}$  est de la forme  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$ , et d'après la proposition 4,  $g_{\mathcal{P}} = g_0 + \text{sym}(\Upsilon^b \otimes X^b)$ .

Lors de l'étude des métriques oscillantes élémentaires d'ordre 1,  $\Upsilon$  avait été choisi comme un champ de vecteurs défini sur  $\Theta$  (autrement dit, défini sur  $\mathcal{C}$  mais tangent à  $\Theta$  et ne dépendant que des variables de  $\Theta$ ). Ceci peut être interprété comme le fait que l'on négligeait les « effets quantiques » liés à  $W$  (mais pas à  $S^1(\delta)$ ).

On considère maintenant que  $\Upsilon$  est un champ de vecteurs défini sur  $\Theta \times S^3(\rho)$  (on néglige les effets quantiques liés à  $V$  mais pas à  $S^1(\delta) \times S^3(\rho)$ ).

le champ de vecteurs  $\Upsilon$  se décompose naturellement sous la forme  $\Upsilon = A + C$  où  $A$  est la composante de  $\Upsilon$  tangente à  $\Theta$  et  $C$  la composante tangente à  $S^3(\rho)$ .

Le champ de vecteurs  $A$  sera considéré comme représentant le potentiel électromagnétique classique et on supposera qu'il ne dépend que des variables de  $\Theta$  (ce dernier point est évidemment à interpréter comme une « approximation »). Il s'écrit donc, dans le système de coordonnées standard :  $A = \sum_{i=0}^3 A^i \partial_i$  où  $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

Le champ de vecteurs  $C$  tangent à  $S^3(\rho)$  se décompose sur la base des trois champs de vecteurs  $L_1|_{S^3}, L_2|_{S^3}, L_3|_{S^3}$  qui parallélisent  $S^3(\rho)$  :  $C = \sum_{k=1}^3 C^k L_k|_{S^3}$ .

Il est à noter que, dans les « unités géométriques », les composantes  $C^k$  sont des « inverses de longueur » (puisque les  $L_k$  ont des composantes de la forme  $x_k \partial_k$ ) alors que les composantes  $A^j$  sont « sans unité ».

La forme spécifique du potentiel électromagnétique va être essentiellement due au choix particulier des composantes  $C^k$ , définies à partir des composantes  $A^j$ , que l'on va préciser dans les lignes qui suivent. **Ce choix n'est justifié que par le fait que l'on va retrouver les résultats standard sur le spin de la physique quantique classique.** (Il est à noter que l'on conserve le fait

que l'indice de nilpotence est au plus 3, il serait sans doute judicieux d'affaiblir cette hypothèse, mais nous nous contentons de retrouver très simplement les résultats standard).

**On pose :**

$$C := \varrho \sum_{k=1}^3 B^k L_k|_{S^3}$$

où  $\varrho$  est une constante et les trois fonctions  $B^k$  sont les trois composantes du champ magnétique :

$$B^1 = \frac{\partial A^3}{\partial x^2} - \frac{\partial A^2}{\partial x^3}, \quad B^2 = \frac{\partial A^1}{\partial x^3} - \frac{\partial A^3}{\partial x^1}, \quad B^3 = \frac{\partial A^2}{\partial x^1} - \frac{\partial A^1}{\partial x^2}.$$

( $\varrho$  est une constante « sans unité » et les  $B^k$  ont bien comme « unités » des inverses de longueur).

*Définition 41.* Le réel  $\varrho$  sera appelé **la constante gyromagnétique** du domaine de type « métrique oscillante avec spin dans un potentiel électromagnétique ».

(voir à ce sujet la remarque 28 présentée plus loin).

*Remarque 27.* L'image du champ de bases orthogonales  $(L_1|_{S^3}, L_2|_{S^3}, L_3|_{S^3})$  par une isométrie  $\sigma$  de l'espace euclidien  $\mathbb{R}^4$  (restreinte à  $S^3(\rho)$ ) est encore un champ de bases orthogonales que l'on peut noter  $(L_1^\sigma|_{S^3}, L_2^\sigma|_{S^3}, L_3^\sigma|_{S^3})$ . **Y peut en fait être choisi plus généralement de la forme  $\Upsilon = A + C_\sigma$  où  $C_\sigma := \varrho \sum_{k=1}^3 B^k L_k^\sigma|_{S^3}$ .** Ceci n'a pas une grande importance dans la mesure où les résultats finaux sur les mesures de spin « simples » que l'on va obtenir ne feront plus intervenir  $S^3(\rho)$  précisément, cependant ce fait prendra de l'importance lors de l'étude des phénomènes d'« intrication quantique » présentés dans la section 2.20.

## 2.15.4 Les équations

Le résultat important de cette sous-section est énoncé dans le théorème 5 qui va suivre. Le cas important est essentiellement celui qui concerne le champ électromagnétique.

On commence par rappeler et préciser quels sont les potentiels utilisés et les hypothèses qui les concernent :

Dans le cadre du potentiel actif sans électromagnétisme, la cellule considérée est

$\mathcal{C} = I \times \mathcal{U} \times S^1(\delta) \times W$  et la métrique du potentiel vérifie :

$$g_{\mathcal{P}} = g_O - 2\nu X_1^\flat \otimes X_1^\flat \quad (\text{prop. 3}).$$

La fonction  $a$  s'écrit  $a = \phi\beta$  où  $\phi : I \times \mathcal{U} \times S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta \in E_W(\mu)$ .

On considère l'hypothèse  $H_{2,N}$  suivante (à comparer avec l'hypothèse  $H_{1,N}$ ) (section 2.11) :

1.  $S_{g_{\mathcal{P}}} = S_{g_O}$ .
2.  $\nu$  est une fonction définie sur  $\mathcal{U}$ .
3.  $X_1$  est un champ de vecteurs défini sur  $I \times W$ ,  $D_{g_O}X_1 = 0$ , et  $X_1$  s'annule sur  $E_W(\mu)$  (c.a.d  $\forall \beta \in E_W(\mu) \quad X_1(\beta) = 0$ )

( $\nu$  et  $X_1$  peuvent être considérés définis sur  $\mathcal{C}$ ).

Dans le cadre du potentiel électromagnétique spécifique, la cellule considérée est

$\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$  et la métrique du potentiel vérifie :

$$g_{\mathcal{P}} = g_O + \text{sym}(\Upsilon^\flat \otimes X_2^\flat) \quad (\text{prop. 4}).$$

La fonction  $a$  s'écrit  $a = \phi\beta$  où  $\phi : \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta \in E_V(\nu)$ .

On considère l'hypothèse  $H_{2,E}$  suivante (à comparer avec l'hypothèse  $H_{1,E}$ ) (section 2.11) :



1.  $S_{g\rho} = S_{g_0}$ .
  2.  $\Upsilon$  est un champ de vecteurs défini sur  $\Theta \times S^3(\rho)$ .
  3.  $X_2$  est un champ de vecteurs défini sur  $S^1(\delta) \times V$ ,  $D_{g_0}X_2 = 0$ , et  $X_2$  s'annule sur  $E_V(\nu)$ .
- La remarque qui suit les énoncés des hypothèses  $H_{1,N}$  et  $H_{1,E}$  s'applique ici aux hypothèses  $H_{2,N}$  et  $H_{2,E}$ .

*Théorème 5. On considère un domaine de type « métrique oscillante élémentaire avec spin dans un potentiel ». Alors, dans les trois cas de potentiels considérés, la fonction canonique  $a_c$  vérifie les équations suivantes :*

1. *Dans un potentiel neutre.*

$$\square_{\Theta} a_c + M^2 a_c = 0 \quad (2.48)$$

où  $\square_{\Theta} = \frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2}$  et  $M$  est la fréquence de masse.

2. *Dans un potentiel sans électromagnétisme sous l'hypothèse  $H_{2,N}$ .*

$$\square_{\Theta} a_c + M^2 a_c - 2\nu \frac{\partial^2 a_c}{(\partial t)^2} = 0 \quad (2.49)$$

où  $\nu$  est la fonction potentiel (def. 17)

3. *Dans un potentiel électromagnétique sous l'hypothèse  $H_{2,E}$ .*

$$\sum_{j=0}^3 \varepsilon_j (i \frac{\partial}{\partial x^j} + Q^+ \Upsilon^j)^2 a_c + M^2 a_c - 2Q Q^+ \sum_{k=1}^3 B^k \hat{S}_k(a_c) + Q^{+2} \varrho^2 \rho^2 |B|^2 a_c = 0 \quad (2.50)$$

où  $\varepsilon_j = g_{0jj}$  c.a.d :  $\varepsilon_0 = -1$  et  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = +1$ ,

$|B|^2 := \sum_{k=1}^3 B^k{}^2$ ,  $\rho$  est le rayon de la sphère  $S^3(\rho)$ ,  $Q$  est la constante gyromagnétique, les  $\hat{S}_k$  sont les isomorphismes canoniques des espaces propres complexifiés de  $S^3(\rho)$  (def. 39) et  $\hat{S}_k(a_k) : \Theta \rightarrow E_p^{\mathbb{C}}$  est définie  $\forall x \in \Theta$  par  $\hat{S}_k(a_c)(x) := \hat{S}_k(a_c(x))$ .

La démonstration de ce théorème est détaillée dans l'annexe 3.9.

Les équations 2.48, 2.49, sont identiques à celles « sans spin » du théorème 3, mais ici **la fonction canonique  $a_c$  est à valeurs dans  $E_p^{\mathbb{C}}$** . Les termes supplémentaires de l'équation 2.50 relatifs à ceux donnés par le théorème 3 traduisent « l'effet de spin » dans le potentiel électromagnétique.

Lorsque la charge électrique est bien définie, les équations 2.48, 2.49 et 2.50 se traduisent, via la définition 33, en terme de fonction d'état  $\Psi$ . Celles-ci redonnent, en approximation, les équations de Schrödinger (ou de Pauli) standard. Nous n'écrivons ici que le résultat correspondant au potentiel électromagnétique.

*Corollaire 1. Sous les hypothèses du théorème 5, lorsque la charge électrique est bien définie (def. 31) et dans le cas du potentiel électromagnétique spécifique, la fonction d'état  $\Psi$  vérifie l'équation :*

$$2iM \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \sum_{j=0}^3 \varepsilon_j (i \frac{\partial}{\partial x^j} + Q \Upsilon^j)^2 \Psi - 2MQ \Upsilon^0 \Psi - 2Q Q^+ \sum_{k=1}^3 B^k \hat{S}_k(\Psi) + Q^2 \varrho^2 \rho^2 |B|^2 \Psi \quad (2.51)$$

Ce résultat s'obtient rapidement en remplaçant  $a_c$  exprimée en fonction de  $\Psi$  (def. 33) dans l'équation 2.50.

Lorsque les  $\varepsilon$ -approximations (précisées dans le paragraphe suivant) seront valides, le dernier terme de l'équation 2.51 pourra être « négligé » (ainsi que le terme en  $j = 0$  de la somme  $\sum$ ) pour redonner exactement « l'équation de Pauli » de la physique quantique classique.

*Remarque 28.* compte tenu des définitions données des domaines de type « métrique oscillante dans un potentiel » pour lesquels la métrique  $g$  est de la forme  $g = |a|^{4/n-2} g_{\mathcal{P}}$ , il paraît naturel de considérer la fonction  $a$  comme « portant » les caractéristiques que l'on attribut aux particules en physique classique (masse, charge électrique, spin, etc.) et  $g_{\mathcal{P}}$  comme portant les caractéristiques du « potentiel seul » dans lequel se trouve les particules. Cependant, cette interprétation est prise en défaut dans le cas des métriques oscillantes avec spin dans un champ électromagnétique puisque la constante gyromagnétique  $\varrho$  a été introduite dans le potentiel spécifique  $g_{\mathcal{P}}$  alors qu'elle est classiquement plutôt associée aux « particules ». En fait, je ne pense pas qu'avec la vision de la physique présentée ici, il faille séparer les deux « objets »  $a$  et  $g_{\mathcal{P}}$ , le domaine (de métrique  $|a|^{4/n-2} g_{\mathcal{P}}$ ) doit être considéré comme un « tout ».

La constante  $\varrho$  a été ici appelée « constante gyromagnétique » car elle correspond, dans les équations obtenues, au demi rapport gyromagnétique des particules de la physique quantique standard ( $\varrho \simeq 1$  dans le cas de l'électron). Une « interprétation » consisterait à poser  $\varrho = 1$  dans la définition de  $g_{\mathcal{P}}$  et à considérer que les domaines de type « métrique oscillante élémentaire avec spin 1/2 » correspondent seulement à la notion « d'électrons » en physique classique. Les domaines décrivant les autres particules auraient une forme plus complexe pour la fonction  $a$  que  $a = \phi\beta$  (qui correspondrait à des particules composées) et ceci se traduirait « en approximation » par l'équation 2.50 donnée par le théorème 5 mais avec  $\varrho \neq 1$ , qui serait bien alors une caractéristique de la fonction  $a$  et non de la métrique  $g_{\mathcal{P}}$ .

*Remarque 29.* Dans l'hypothèse  $H_{2,E}$  sur le potentiel électromagnétique, on a supposé que  $\Upsilon$  était défini sur  $\Theta \times S^3(\rho)$  et non sur  $\Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho)$ . Les termes supplémentaires qu'apporterait cette généralisation (naturelle) ne sont pas nécessairement compatibles avec l'équation **linéaire**  $\square a + S a = 0$ , mais pourraient être estimés, par des calculs très complexes, dans le cadre de l'équation non linéaire 2.2. Il est possible que, dans l'étude des processus qui consistent à déterminer la valeur de la constante gyromagnétique  $\varrho$  pour « l'électron », ce soient les termes correcteurs dont on vient de parler qui expliqueraient la légère différence mesurée entre  $\varrho$  et 1, (mais ceci n'est pour l'instant que de la simple spéculation).

### 2.15.5 Les $\varepsilon$ -approximations

#### Les $\varepsilon$ -approximations pour la fonction d'état

On les pose identiques à celles de la définition 34, mais ici  $\Psi$  est à valeurs dans  $E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$ .

#### Les $\varepsilon$ -approximations pour les potentiels

On reprend les conditions données dans la définition 35 auxquelles on ajoute une condition sur les champs magnétiques  $B^1, B^2, B^3$  car ceux-ci interviennent dans la définition de  $g_{\mathcal{P}}$  ainsi que dans l'équation 2.50 du théorème 5. Les conditions sur  $(\rho B^k)$  sont choisies identiques à celles

posées pour  $\Upsilon_0$  puisque ces deux termes interviennent de la même manière dans l'équation 2.50 du théorème 5.

On rappelle que le seul intérêt des  $\varepsilon$ -approximations (sur la fonction d'état ou sur les potentiels) est de donner des conditions précises qui rendent « négligeables » certains termes des équations 2.48, 2.49, 2.50. Ces dernières, après la suppression de ces termes négligeables, deviennent identiques aux équations obtenues en physique quantique classique.

### 2.15.6 La probabilité de présence d'une singularité dans un domaine de type « métrique oscillante élémentaire avec spin dans un potentiel »

Il s'agit de reprendre ici, mais en tenant compte du « spin », ce qui a été exposé dans la section 2.14. Les modifications sont mineures, elles consistent uniquement à tenir compte de la présence de la variété compacte  $S^3(\rho)$  et des espaces propres associés  $E_{S^3(\rho)}(\gamma)$ . La fonction canonique  $a_c$  associée à la fonction  $a$  ainsi que la fonction d'état  $\Psi$  sont maintenant à valeurs dans  $E_{S^1(\delta)}(\lambda) \otimes E_{S^3(\rho)}(\gamma)$  identifié à  $E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma) := E_p^{\mathbb{C}}$ .

$E_{S^3(\rho)}(\gamma)$  est naturellement muni du produit scalaire :

$$\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle_{L^2} := \int_{S^3(\rho)} \alpha_1 \alpha_2 dv_{S^3}$$

Le complexifié  $E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$  est alors muni du produit hermitien :

$$\langle \alpha, \alpha' \rangle := \int_{S^3(\rho)} \alpha \overline{\alpha'} dv_{S^3} \quad (2.52)$$

où  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$  et  $\alpha' = \alpha'_1 + i\alpha'_2 \in E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$

En particulier :

$$|\alpha|^2 := \langle \alpha, \alpha \rangle = \int_{S^3(\rho)} (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) dv_{S^3} = |\alpha_1|_{L^2}^2 + |\alpha_2|_{L^2}^2 \quad (2.53)$$

Le fait qu'aucune loi ne régit les singularités dans un domaine  $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$  a été traduit mathématiquement dans la section 2.14 par 2.35 et 2.36. On rappelle que, si  $\mathcal{H}_{2(t,u)} \subset \mathcal{H}_{1(t,u)}$  sont des sous-variétés de genre espace de dimension  $(n-2)$ , alors, lorsque  $\varsigma$  est une singularité élémentaire dans  $\mathcal{H}_{1(t,u)}$ , la probabilité qu'elle se trouve dans  $\mathcal{H}_{2(t,u)}$  est :

$$P_{(t,u)} = \int_{\mathcal{H}_{2(t,u)}} dv_{g_{\mathcal{H}_{1(t,u)}}} / \int_{\mathcal{H}_{1(t,u)}} dv_{g_{\mathcal{H}_{1(t,u)}}}$$

On considère une carte de l'atlas d'observation pour laquelle la cellule type  $(\mathcal{C}, g)$  est celle d'une métrique oscillante avec spin dans un potentiel, pour laquelle :

$\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$  ( $\Theta$  est supposé de la forme  $I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ) et  $g = |a|^{4/n-2} g_P$ .

On « fixe »  $(t, u) \in \mathbb{R} \times S^1(\delta)$ .

Soient  $\mathcal{H}_{2(t,u)} \subset \mathcal{H}_{1(t,u)} \subset \mathcal{C}$  de la forme :

$$\mathcal{H}_{2(t,u)} = \{t\} \times \omega \times \{u\} \times S^3(\rho) \times V$$

$$\mathcal{H}_{1(t,u)} = \{t\} \times \Omega \times \{u\} \times S^3(\rho) \times V$$

avec  $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$

On suppose que les potentiels vérifient les  $\varepsilon$ -approximations présentées dans le paragraphe précédent.

On obtient alors (cf. 2.39) :

$$P_{(t,u)} \simeq \int_{\mathcal{H}_{2(t,u)}} (*) / \int_{\mathcal{H}_{1(t,u)}} (*) \quad (2.54)$$

$$\text{où } (*) = a_{(t,u)}^2 \sqrt{\det g_0|_{\mathcal{H}_{1(t,u)}}} dv_{g_0|_{\mathcal{U} \times S^3(\rho) \times V}}$$

Examinons le cas d'une métrique oscillante élémentaire **d'ordre 2** pour laquelle, par définition :

$$a = \phi\beta$$

$$\text{où } \phi : \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \rightarrow \mathbb{R} \text{ vérifie : } \phi = \phi_1 \cos(Q^+u) + \phi_2 \sin(Q^+u),$$

$$\phi_1 \text{ et } \phi_2 \text{ sont deux fonctions réelles définies sur } \Theta \times S^3(\rho),$$

$$\forall x \in \Theta \quad \phi_{1,x}(\cdot) \text{ et } \phi_{2,x}(\cdot) \in E_{S^3(\rho)}(\gamma),$$

$$\beta \in E_V(v),$$

(On rappelle que la fonction canonique  $a_c$  est ici définie par  $a_c = \phi_1 + i\phi_2$ , alors :  $\forall x \in \Theta$   
 $a_{c,x}(\cdot) \in E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$ ).

On obtient, en utilisant 2.54 et en « simplifiant » par  $\int_V \beta^2 dv_{g_0|_V}$  :

$$P_{(t,u)} \simeq \int_{\omega \times S^3(\rho)} (**) dx^i dv_{g_0|_{S^3}} / \int_{\Omega \times S^3(\rho)} (**) dx^i dv_{g_0|_{S^3}}$$

$$\text{où } (**) = \cos^2(Q^+u) \phi_1^2_{(t,x^i,s)} + \sin^2(Q^+u) \phi_2^2_{(t,x^i,s)} + 2 \cos(Q^+u) \sin(Q^+u) \phi_1 \phi_2_{(t,x^i,s)}$$

$$\text{et } (x^i) := (x^1, x^2, x^3) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3, \quad dx^i := dx^1 dx^2 dx^3.$$

En considérant la « moyenne » sur  $S^1(\delta)$  (cf. 2.41), on écrit :

$$P(t) \simeq \int_{\omega \times S^3(\rho)} (\phi_1^2 + \phi_2^2)_{(t,x^i,s)} dx^i dv_{g_0|_{S^3}} / \int_{\Omega \times S^3(\rho)} (\phi_1^2 + \phi_2^2)_{(t,x^i,s)} dx^i dv_{g_0|_{S^3}}.$$

D'où :

$$P(t) \simeq \int_{\omega} |a_{c(t,x^i)}|^2 dx^i / \int_{\Omega} |a_{c(t,x^i)}|^2 dx^i.$$

ici,  $|\cdot|$  est la norme dans  $E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$  définie en 2.53.

Lorsque la métrique oscillante élémentaire a une charge électrique bien définie (def. 31) et compte tenu de la définition de la fonction d'état  $\psi : \Theta \rightarrow E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$ , on obtient :

$$P(t) \simeq \int_{\omega} |\psi_{(t,x^i)}|^2 dx^i / \int_{\Omega} |\psi_{(t,x^i)}|^2 dx^i.$$

On retrouve ici un résultat standard de la physique quantique classique, à la différence cependant que le dénominateur  $\int_{\Omega} |\psi_{(t,x^i)}|^2 dx^i$  peut dépendre de  $t$  (cf. les commentaires à ce sujet de la section 2.14).

### 2.15.7 Quelques exemples

#### Exemple 1 - Le spin 1/2

Par définition, un domaine de type « métrique oscillante élémentaire avec spin dans un potentiel » possède un spin 1/2 lorsque l'espace propre  $E_{S^3(\rho)}(\gamma)$  correspond à l'espace  $E_1$  de la classification donnée en 2.46. Dans ce cas,  $\gamma = 3\rho^{-2}$  et  $\dim E_1 = 4$ .

Une base naturelle de cet espace propre est obtenue en prenant sur  $S^3(\rho)$  les restrictions  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  des fonctions coordonnées de  $\mathbb{R}^4$  (polynômes harmoniques homogènes de degré 1) que l'on notera ici :  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  (cf. annexe 3.8).

Puisque l'indice de spin est demi-entier, on sait que les fonctions propres  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  ne proviennent pas de la sphère  $S^2$  par la fibration de Hopf.

On note  $M_1, M_2, M_3$  les matrices de  $S_1, S_2, S_3$  (def. 38) relatives à la base  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ . Ce sont les mêmes que les matrices des opérateurs différentiels  $L_1, L_2, L_3$  relatives à la base  $((x_1), (x_2), (x_3), (x_4))$  puisque  $(L_k(x_l))|_{S^3} = (L_k|_{S^3})(x_l|_{S^3})$ .

Un calcul très rapide, partant des expressions de  $L_1, L_2, L_3$ , donne :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Les trois matrices  $\hat{M}_k$  des endomorphismes  $\hat{S}_k$  de  $E_1^{\mathbb{C}}$  sont donc  $\hat{M}_k = -iM_k$  d'après la définition (39).

(On peut vérifier que ces trois matrices  $\hat{M}_k$  ont les propriétés de commutation des matrices de Pauli qui ne sont que des cas particuliers des propriétés de commutation des observables de moment cinétique (au facteur  $\hbar$  près)).

Sous les hypothèses du corollaire 1, la fonction d'état  $\Psi$  vérifie l'équation 2.51. Notons  $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4$  les quatre fonctions complexes définies sur  $\Theta$ , composantes de  $\Psi$  dans la base  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  :  $\Psi = \sum_{j=1}^4 \psi^j \alpha_j$ .

L'équation 2.51 se décompose alors en quatre équations :

$$2iM \frac{\partial \psi^1}{\partial t} = (\alpha) \psi^1 + 2Q Qi(B^1 \psi^3 - B^2 \psi^4 + B^3 \psi^2) \quad (2.55)$$

$$2iM \frac{\partial \psi^2}{\partial t} = (\alpha) \psi^2 + 2Q Qi(B^1 \psi^4 + B^2 \psi^3 - B^3 \psi^1) \quad (2.56)$$

$$2iM \frac{\partial \psi^3}{\partial t} = (\alpha) \psi^3 + 2Q Qi(-B^1 \psi^1 - B^2 \psi^2 - B^3 \psi^4) \quad (2.57)$$

$$2iM \frac{\partial \psi^4}{\partial t} = (\alpha) \psi^4 + 2Q Qi(-B^1 \psi^2 + B^2 \psi^1 + B^3 \psi^3) \quad (2.58)$$

où  $(\alpha)$  est l'opérateur :  $(\sum_{j=0}^3 \varepsilon_j (i \frac{\partial}{\partial x^j} + Q \Upsilon^j)^2 - 2MQ \Upsilon^0 + \varrho^2 Q^2 \rho^2 |B|^2)$ .

Il est alors intéressant de définir les quatre fonctions :

$$\begin{aligned} \varphi^1 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^3 - i\Psi^4), & \varphi^2 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^2 + i\Psi^1) \\ \varphi^3 &:= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\Psi^1 + i\Psi^2), & \varphi^4 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(-\Psi^4 + i\Psi^3) \end{aligned}$$

Le coefficient  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  est pris de sorte que :  $\sum_{j=1}^4 |\varphi^j|^2 = \sum_{j=1}^4 |\Psi^j|^2 = |\Psi|_{E_1^{\mathbb{C}}}^2$ .

Ces quatre fonctions complexes correspondent aux composantes de la fonction  $\Psi$  dans la base de  $E_1^{\mathbb{C}}$  :

$$\begin{aligned} \beta_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_3 + i\alpha_4), & \beta_2 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_2 - i\alpha_1) \\ \beta_3 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(i\alpha_2 - \alpha_1), & \beta_4 &:= \frac{-1}{\sqrt{2}}(i\alpha_3 + \alpha_4) \end{aligned} \quad (2.59)$$

Dans cette base, les trois matrices  $\hat{M}_k$  des endomorphismes  $\hat{S}_k$  de  $E_1^{\mathbb{C}}$  sont :

$$\hat{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{M}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

les équations 2.55, 2.56, 2.57, 2.58 montrent que les fonctions  $(\varphi^j)$  vérifient :

$$2iM \frac{\partial \varphi^1}{\partial t} = (\alpha) \varphi^1 + 2\varrho Q(-B^1 \varphi^2 - iB^2 \varphi^2 + B^3 \varphi^1) \quad (2.60)$$

$$2iM \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} = (\alpha) \varphi^2 + 2\varrho Q(-B^1 \varphi^1 + iB^2 \varphi^1 - B^3 \varphi^2) \quad (2.61)$$

$$2iM \frac{\partial \varphi^3}{\partial t} = (\alpha) \varphi^3 + 2\varrho Q(-B^1 \varphi^4 - iB^2 \varphi^4 + B^3 \varphi^3) \quad (2.62)$$

$$2iM \frac{\partial \varphi^4}{\partial t} = (\alpha) \varphi^4 + 2\varrho Q(-B^1 \varphi^3 + iB^2 \varphi^3 - B^3 \varphi^4) \quad (2.63)$$

Le couple d'équations (2.60, 2.61) est **identique** au couple (2.62, 2.63) lorsque  $\varphi^1$  devient  $\varphi^3$  et  $\varphi^2$  devient  $\varphi^4$ .

**Chacun de ces couples d'équations correspond exactement aux équations de Pauli de la physique quantique classique** lorsque le dernier terme ainsi que celui en  $j = 0$  (dans la somme  $\sum$ ) de l'opérateur  $(\alpha)$  sont supprimés. Ceux-ci sont effectivement « négligés » lorsque les  $\varepsilon$ -approximations sont valides.

On laisse le soin au lecteur d'interpréter d'ores et déjà les résultats d'une expérience de type « Stern-Gerlach » pour un spin 1/2, en terme de « déformation de l'espace temps » relatif à  $g_0$  précisée par les couples d'équations (2.60, 2.61) et (2.62, 2.63), cependant ceci sera développé dans la section 2.19 pour permettre d'aborder l'étude des phénomènes d'« intrication quantique » dans la section 2.20.

**Exemple 2 - Le spin 1**

Le spin 1 est associé au domaine pour lequel l'espace propre  $E_{S^3(\rho)}(\gamma)$  correspond à l'espace classé  $E_2$  (cf. 2.46). Dans ce cas  $\gamma = 8\rho^{-2}$ . On sait que les espaces  $E_q$  dont l'indice  $q$  est pair, contiennent un sous-espace  $E'_q$  qui s'identifie à l'espace propre  $E_{S^2(\rho/2)}(\gamma)$  de la sphère  $S^2(\rho/2)$  (cf. annexe 3.8). Nous pourrions faire la description générale du « spin  $q$  », lorsque  $q$  est pair, en considérant les espaces  $E_q$  (et non  $E'_q$ ), mais nous ne présenterons, comme exemple, que le cas particulier où la fonction d'état associée à la métrique oscillante vérifie  $\Psi_x(\cdot) \in E_2^{\mathbb{C}}$ . La dimension des espaces  $E'_q$  est  $q + 1$ , ce qui correspond bien à la dimension considérée en physique quantique standard pour les « spin entiers ».

Nous choisissons comme base de  $E'_2$ , les restrictions à  $S^3(\rho)$  des trois polynômes  $\tilde{P}_k$ , harmoniques, homogènes de degré 2, qui s'écrivent sous la forme  $\tilde{P}_k = P_k \circ \pi$  où  $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  est l'application qui définit la fibration de Hopf et les polynômes  $P_k$  sont les « fonctions coordonnées » de  $\mathbb{R}^3 : (y_1), (y_2), (y_3)$ .

On a donc (cf. annexe 3.8) :

$$\begin{aligned}\tilde{P}_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_3 + x_2 x_4 \\ \tilde{P}_2(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1 x_4 - x_2 x_3 \\ \tilde{P}_3(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

On note  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) := (\tilde{P}_1|_{S^3(\rho)}, \tilde{P}_2|_{S^3(\rho)}, \tilde{P}_3|_{S^3(\rho)})$  la base choisie dans  $E'_2$ .

Les matrices  $M_1, M_2, M_3$  de  $S_1, S_2, S_3$  (def. 38) relatives à la base  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$  sont les mêmes que les matrices des opérateurs différentiels  $L_1, L_2, L_3$  relatives à la base  $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2, \tilde{P}_3$ .

Un calcul rapide donne :

$$M_1 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_2 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 = 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Les trois matrices  $\hat{M}_k$  des endomorphismes  $\hat{S}_k$  de  $E_2^{\mathbb{C}}$  sont donc  $\hat{M}_k = -iM_k$ .

Sous les hypothèses du corollaire 1, la fonction d'état  $\Psi$  vérifie l'équation 2.51. Notons  $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3$  les trois fonctions complexes définies sur  $\Theta$ , composantes de  $\Psi$  dans la base  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ .

L'équation 2.51 se décompose alors en trois équations :

$$\begin{aligned}2iM \frac{\partial \Psi^1}{\partial t} &= (\alpha) \Psi^1 + 4Q Qi(B^3 \Psi^2 + B^1 \Psi^3) \\ 2iM \frac{\partial \Psi^2}{\partial t} &= (\alpha) \Psi^2 + 4Q Qi(-B^3 \Psi^1 + B^2 \Psi^3) \\ 2iM \frac{\partial \Psi^3}{\partial t} &= (\alpha) \Psi^3 + 4Q Qi(B^1 \Psi^1 - B^2 \Psi^2)\end{aligned}$$

où  $(\alpha)$  est l'opérateur :

$$\sum_{j=0}^3 \varepsilon_j (i \frac{\partial}{\partial x^j} + Q \Upsilon^j)^2 - 2MQ \Upsilon^0 + \varrho^2 Q^2 \rho^2 |B|^2$$

On laisse, là encore, le soin au lecteur d'interpréter les résultats d'une expérience de type « Stern-Gerlach » pour un spin 1, en terme de « déformation de l'espace-temps » relatif à  $g_0$  précisée par les trois équations précédentes.

## 2.16 Les métriques oscillantes à masse nulle

La notion de masse a été définie pour les métriques oscillantes élémentaires associées à un espace propre  $E_{\lambda,\mu}$  (def. 21). la fréquence de masse  $M$  est (def. 24) la constante positive ou nulle  $\sqrt{S + \mu - \lambda}$  où  $S := \frac{n-2}{4(n-1)} S_{g_0}$ ,  $S_{g_0}$  étant la courbure scalaire constante de la métrique  $g_0$ .

**Nous considérons donc dans cette section, le cas pour lequel  $M = 0$ , c'est à dire :  $S = \lambda - \mu$ .**

On remarquera que, si  $\lambda = 0$ , cette égalité ne peut être vérifiée que si la courbure scalaire est négative ou nulle (ce qui n'est pas à exclure (cf. remarque 16)).

La fréquence de charge électrique a été définie (def.23) par  $Q^+ := \sqrt{\lambda}$ , cependant, lorsque l'on considère que  $M = 0$ , la charge électrique relative n'est en général pas définie (def. 31) et il en est de même, par conséquent, de la fonction d'état  $\psi$ .

La constante  $Q^+$  (qui peut être nulle) restera une caractéristique importante des métriques oscillantes à « masse nulle », mais le terme « fréquence de charge électrique » ne sera plus adapté si l'on veut rester proche du langage de la physique standard.

**Les équations vérifiées par la fonction canonique  $a_c$  d'une métrique oscillante élémentaire d'ordre 1 ou 2 à masse nulle ont été données par les théorèmes 3 et 5 où il suffit de poser  $M = 0$ .**

On réécrit ici les équations obtenues pour les métriques oscillantes élémentaires d'ordre 1 à masse nulle (pour celles d'ordre 2 (cf. thm. 5), seul le cas du potentiel électromagnétique est différent car on tient compte de la notion de « spin », de plus,  $a_c$  est à valeurs dans  $E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$  et non dans  $\mathbb{C}$ ).

1. Dans un potentiel neutre.

$$\square_{\Theta} a_c = 0 \tag{2.64}$$

$$\text{où } \square_{\Theta} = \frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2}$$

2. Dans un potentiel actif sans électromagnétisme.

$$\square_{\Theta} a_c = 2v \frac{\partial^2 a_c}{(\partial t)^2} \tag{2.65}$$



3. Dans un potentiel électromagnétique.

$$\sum_{j=0}^3 \varepsilon_j (i \frac{\partial}{\partial x^j} + Q^+ \Upsilon^j)^2 a_c = 0 \quad (2.66)$$

où  $\varepsilon_j = g_{0jj}$

Dans le cas du potentiel neutre, la fonction canonique  $a_c$  est donc solution de l'équation des ondes classique. Les ondes électromagnétiques standard seront pour nous des métriques oscillantes à masse nulle particulières.

Les équations 2.65 et 2.66 décrivent l'influence d'un potentiel sur la métrique oscillante à masse nulle. Qu'une telle influence existe n'est pas surprenant et apparaît déjà en relativité générale classique où l'on sait que, par exemple, un champ électromagnétique déforme l'espace-temps par l'intermédiaire de son tenseur d'énergie-impulsion.

Lorsque l'on considère un domaine avec singularités  $(\mathcal{D}, g, \mathcal{S})$  (def. 37) pour lequel  $g$  est une métrique oscillante élémentaire **à masse nulle**, la probabilité de présence d'une singularité dans  $\mathcal{D}$  a été étudiée dans la section 2.14. Les singularités s'assimileront à des *photons* dans le cadre des ondes électromagnétiques standard, à des *gravitons* dans le cadre des ondes gravitationnelles, etc., mais ceci lorsque nous aurons donné des définitions précises pour les différents domaines de types « métriques oscillantes à masse nulle » dans lesquels se trouvent ces singularités.

Dans cette section, les métriques oscillantes à masse nulle ont été présentées d'un point de vue « quantique » (avec notre regard). Cependant, on peut aussi s'intéresser à ces notions en terme de « fluide de genre lumière », mais alors ce n'est plus le même type d'approximations que l'on utilise et ceci correspond au premier chapitre de ce papier dans lequel on a exclu les « phénomènes quantiques » puisque l'on a fait, dès le départ, une moyenne de la métrique  $g$  sur les cercles  $S_x^1(\delta)$  (cf. lemme 1).

## 2.17 Une métrique oscillante « très élémentaire »

Considérons un domaine de type « métrique oscillante élémentaire dans un potentiel neutre associé à  $E_{\lambda,\mu}$  (def. 21) **pour lequel**  $\lambda = 0$  **et**  $\mu = 0$ . Les fonctions propres intervenant dans la décomposition spectrale de la fonction  $a$  associée sont donc toutes constantes. La fréquence de charge électrique  $Q^+$  est nulle, le « spin » est nul, etc. La fonction  $a$  se réduit donc à une fonction réelle définie sur  $\Theta \subset \mathbb{R}^4$  (l'équivalent d'un champ scalaire en T.Q.C).

Dans le cadre de l'approximation linéaire, l'équation fondamentale 2.3 s'écrit :

$$\square_{g_p} a + S a = 0 \quad \text{où } S = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{g_0} \quad \text{et} \quad \square_{\Theta} = \frac{\partial^2}{(\partial t)^2} - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2}.$$

En supposant que  $S_{g_0}$  est strictement positive, la fréquence de masse n'est autre que :

$$M = \left( \frac{n-2}{4(n-1)} S_{g_0} \right)^{1/2}.$$

Cette métrique oscillante a donc la forme **la plus simple possible** que l'on puisse écrire dans un potentiel neutre et sa masse ne dépend que de la courbure scalaire du potentiel neutre.

On avait déjà remarqué, lors de la définition de la masse (def. 25), qu'une courbure scalaire strictement positive du potentiel neutre « donne » de la masse à des métriques oscillantes élémentaires associées à  $E_{\lambda,\mu}$  pour lesquelles  $\mu - \lambda$  est strictement négatif (lorsque  $S + \mu - \lambda$  est positif).

Il me paraît naturel de faire le lien entre cette métrique oscillante élémentaire et le champ de Higgs présenté en T.Q.C. On peut considérer que les singularités dans un tel domaine correspondent aux bosons de Higgs, cependant il est probable que ces singularités associées à ce domaine précis soient « indécélables ». Les expériences qui permettent de déceler effectivement la présence de bosons de Higgs ne rentrent certainement pas dans le cadre de la métrique oscillante que l'on vient de présenter mais décrivent des phénomènes d'interaction complexes pour lesquels la notion de « masse » n'a plus le sens qu'on lui a donnée jusqu'à présent et la notion de « durée de vie » devient importante. Ces derniers points sont succinctement abordés dans la section 2.21.

## 2.18 Grandeurs et mesures

Il est important de remarquer que, dans tout ce que nous avons présenté dans ce papier, la notion d'*impulsion* (par exemple) n'est pas intervenue, alors que cette notion est fondamentale dans toutes les théories physiques standard. Dans le chapitre sur les phénomènes quantiques la seule notion de *mesure* que nous ayons considérée est celle de *position* et celle-ci n'a été définie que pour les *singularités* (cf. 2.13). Ceci est suffisant pour décrire qualitativement et quantitativement toutes les expériences standard de la physique quantique (diffraction, fentes de Young, déviations par un potentiel, expérience de Stern-Gerlach, intrication quantique, etc.). Il va s'agir maintenant d'aborder des phénomènes plus complexes (traités actuellement par la T.Q.C). Il n'y a aucune raison, à priori, avec le regard que l'on porte ici sur la physique, d'introduire des notions d'*impulsion*, d'*énergie*, etc. Cependant, dans le but de « garder le contact » avec les théories physiques standard de manière à pouvoir comparer nos résultats théoriques avec les leurs, nous allons introduire dans cette section la notion de *grandeurs* telles que l'*impulsion*, l'*énergie*, etc., qui seront associées aux métriques conformes à un potentiel (et non à des singularités) ainsi que la notion d'*instrument de mesure de ces grandeurs*. Nous retrouverons en particulier dans cette étude des inégalités analogues aux *relations d'incertitudes* de la physique quantique standard, mais pour nous, celles-ci n'auront conceptuellement pas une grande importance.

Il est à noter que la notion de *vitesse* (qui permet d'introduire la notion d'*impulsion*) n'a été définie que dans le cas très particulier des métriques oscillantes homogènes (cf. 2.8), ceci servira néanmoins de base à ce que nous allons introduire.

Dans tout ce qui concerne cette section la cellule type est de la forme  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  où  $\Theta = I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$  et la métrique de référence est  $g_0 = g_\Theta \times (-g_{S^1(\delta)}) \times g_W$ .

### 2.18.1 Un exemple

Avant de préciser dans un cadre général les définitions relatives à la notion de mesure, nous commençons par considérer le cas particulier d'un domaine de type « métrique oscillante d'ordre 1 dans un potentiel neutre » qui servira d'exemple de référence dans cette section.

La métrique  $g$  s'écrit :  $g = |a|^{4/n-2} g_0$  et la fonction  $a$  est de la forme particulière :

$a = \beta \sum_{j=1}^p \varphi_j$  où,  $\forall j$  de 1 à  $p$ ,  $\varphi_j : \Theta \times S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie :

$$\varphi_j = C_j \cos(M_j t + Qu - \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk} x^k) + C'_j \sin(M_j t + Qu - \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk} x^k).$$

$C_j$  et  $C'_j$  sont ici des constantes,  $\beta \in E_W(\mu)$ ,  $Q$  est la charge électrique relative.

D'après la définition 29 chaque fonction  $a_j := \beta \varphi_j$  correspond à une métrique oscillante élémentaire **homogène** d'ordre 1 et le vecteur vitesse de cette métrique oscillante est donné par :

$$\vec{v}_j = (1/M_j)(\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \lambda_{j3}).$$

L'impulsion correspondante est alors naturellement définie par :

$$\vec{\lambda}_j := M_j \vec{v}_j = (\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \lambda_{j3}).$$

$M_j$  est la (fréquence de) masse « relativiste », elle est liée à la masse « au repos »  $M_0$  (que l'on considère ne pas dépendre de  $j$  sur cet exemple) par (cf.2.8) :

$$M_0 = (1 - |\vec{v}_j|^2)^{1/2} M_j.$$

Il est facile de vérifier que  $\square_{g_0} a + S a = 0$  puisque  $M_0^2 = S + \mu - Q^2$ . La métrique oscillante donnée par  $g = |a|^{4/n-2} g_0$  est donc bien *élémentaire* d'ordre 1 dans un potentiel neutre.

Notons (cf.2.10) que la fonction canonique associée vérifie :

$a_c = \sum_{j=1}^p (C_j + iC'_j) e^{-i(M_j t - \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk} x^k)}$  lorsque  $Q > 0$ , et est égale au conjugué lorsque  $Q < 0$ .

La fonction d'état est :

$$\Psi = \sum_{j=1}^p (C_j + iC'_j) e^{-i((M_j - M_0)t - \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk} x^k)}.$$

Dans le langage « classique », l'étude du domaine que l'on vient de décrire (lorsque l'on considère que la fonction d'état  $\Psi$  est celle de la physique quantique standard) est traduite de la manière suivante :

Soit une particule de masse  $m$  et de charge électrique  $q$  dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  telle que la fonction d'état  $\Psi$  soit celle que l'on vient de préciser. Alors, d'après les principes de la physique quantique classique (délicats dans ce cas car  $\Psi$  n'est pas normalisable), on peut conclure que, lors d'une mesure de l'impulsion de la particule à un instant  $t_0$ , la probabilité d'obtenir  $\vec{q}_j = (\lambda_{j1}, \lambda_{j2}, \lambda_{j3})$  est  $(C_j^2 + C_j'^2) / \sum_{j=1}^p (C_j^2 + C_j'^2)$ .

Pour nous, le processus va être fondamentalement différent et nous allons avoir recours à une définition précise de la notion de *grandeurs* puis à celle d'*instrument de mesure de ces grandeurs* qui, utilisées en particulier sur l'exemple précédent, redonneront des résultats analogues à ceux de la physique quantique standard. Bien que les définitions partent des mêmes principes, nous présenterons dans deux sous-sections différentes les notions de *grandeurs* liées à l'espace apparent  $\Theta$  et celles liées aux variétés compactes de la cellule type  $\mathcal{C}$ . La non-compacité de l'espace apparent demandera une présentation plus élaborée que celle qui concerne les variétés compactes.

### 2.18.2 Les grandeurs liées à l'espace apparent $I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ et leurs mesures

Comme les fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}^p$  que nous allons considérer n'appartiendront pas nécessairement à  $L^2(\mathbb{R}^p)$ , nous introduisons la définition suivante où l'on note  $B_L$  le cube dans  $\mathbb{R}^p$  dont les coordonnées des sommets sont  $(\pm L/2, \dots, \pm L/2)$ .

**Définition 42.** Une famille  $(f_i)_{i \in \mathcal{G}}$  de fonctions réelles continues sur  $\mathbb{R}^p$  est **B-orthonormée** si :

1.  $\forall i \in \mathcal{G} \quad \frac{2}{L^p} \int_{B_L} f_i^2 \rightarrow 1$  quand  $L$  tend vers l'infini.
2.  $\forall i, j \in \mathcal{G}$  tels que  $i \neq j \quad \frac{2}{L^p} \int_{B_L} f_i f_j \rightarrow 0$  quand  $L$  tend vers l'infini.

$\frac{2}{L^p} \int_{B_L} f_i f_j$  sera parfois noté  $\langle f_i, f_j \rangle_{B_L}$ . Le choix du facteur « 2 » permettra de simplifier certains coefficients dans les calculs qui vont suivre, essentiellement lorsque les fonctions  $f_i$  seront des fonctions trigonométriques.

La notion de *grandeur* que l'on introduit maintenant n'aura d'intérêt que liée à la notion d'*instrument de mesure* que l'on définira ensuite.

**Définition 43.** On considère l'espace apparent  $I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ .

**Une grandeur définie sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  (resp.  $I \subset \mathbb{R}$ )** est une famille  $(h_i)_{i \in \mathcal{G}}$  de fonctions  $C^\infty$  définies sur  $\mathbb{R}^3$  (resp.  $\mathbb{R}$ ) à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  telle que la réunion des  $m$  familles composantes  $(h_{1,i})_{i \in \mathcal{G}}, \dots, (h_{m,i})_{i \in \mathcal{G}}$  forme une famille B-orthonormée (déf. 42).

**Remarque 30.** Dans les exemples qui vont suivre  $m$  sera égal à 2 et dans ce cas nous pourrions dire que les fonctions  $h_i$  sont à valeurs dans  $\mathbb{C}$  plutôt que dans  $\mathbb{R}^2$ . L'introduction de  $\mathbb{C}$  permet effectivement de simplifier certains calculs dans les cas particuliers des domaines pour lesquels la fonction canonique (cf. 2.10) est définie. Cependant les définitions qui vont suivre s'appliquent dans un cadre plus général.

Les deux exemples fondamentaux sont les suivants.

### Exemple 1

La **grandeur impulsion** est définie par la famille  $(h_{\vec{q}})_{\vec{q} \in \mathcal{G}}$

où  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^{3*}$  et  $\forall \vec{q} = (q_1, q_2, q_3) \in \mathcal{G} \quad h_{\vec{q}} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  vérifie :

$$\forall (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \quad h_{\vec{q}}(x_1, x_2, x_3) = (\cos(\sum_{k=1}^3 q_k x^k), \sin(\sum_{k=1}^3 q_k x^k)).$$

### Exemple 2

La **grandeur énergie** est définie par la famille  $(h_e)_{e \in \mathcal{G}}$  où  $\mathcal{G} = \mathbb{R}^*$

et,  $\forall e \in \mathcal{G} \quad h_e : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  vérifie :  $\forall t \in \mathbb{R} \quad h_e(t) = (\cos(et), \sin(et))$ .

**Remarque 31.** Habituellement, la dénomination de la *grandeur* considérée est plutôt donnée aux éléments de l'ensemble des indices  $\mathcal{G}$  : on parlera de l'*impulsion*  $\vec{q} = (q_1, q_2, q_3)$  ou de l'*énergie*  $e$ .

On notera que l'ensemble  $\mathbb{R}^3$  qui correspond à la grandeur *impulsion* représente l'espace tangent à  $\Omega$  en chacun de ses points (qui s'identifie canoniquement à  $\mathbb{R}^3$  relativement au choix de la cellule type).

Pour préciser maintenant le lien entre la notion de *mesure d'une grandeur* associée à un domaine de type « métrique conforme à un potentiel » et la réalité physique, nous présentons sous forme de *définitions* la notion d'*instrument de mesure d'une grandeur*. Ces définitions ne concernent pour l'instant que les grandeurs que l'on vient de présenter associées à l'espace

apparent, mais elles s'adapteront sans difficultés aux grandeurs associées aux variétés compactes que l'on précisera ensuite.

On considère un domaine de type « métrique conforme à un potentiel » de cellule type  $(\mathcal{C}, g)$  où  $\mathcal{C} = I \times \Omega \times S^1(\delta) \times W$  et  $g = |a|^{4/n-2} g_{\mathcal{P}}$ ,  $g_{\mathcal{P}}$  étant une métrique de potentiel (ce domaine peut être en particulier un domaine « à courbure scalaire constante » (def.19) ou de type « métrique oscillante » (def.20)).

Soit une grandeur  $(h_i)_{i \in \mathcal{G}}$  (def.43) associée à ce domaine. Les trois caractéristiques importantes d'un instrument de mesure de cette grandeur, dont la définition va suivre, sont les suivantes.

1. Son **spectre** qui, par définition, est une sous-famille finie de la famille  $(h_i)_{i \in \mathcal{G}}$ , c'est à dire une famille  $(h_i)_{i \in Sp}$  où  $Sp$  est une partie finie de  $\mathcal{G}$ .
2. Son **domaine de mesure**  $B_L$  qui est un cube de  $\mathbb{R}^3$  dont les coordonnées des sommets sont  $(\pm L/2, \pm L/2, \pm L/2)$  et est donc de volume euclidien  $L^3$ . Pour simplifier, et sans restreindre la généralité, on supposera que  $0 \in \Omega$  et que, pour  $L$  suffisamment petit,  $B_L \subset \Omega$ , ce qui peut toujours s'obtenir par une « translation » des coordonnées  $(x^1, x^2, x^3)$  dans la cellule type.
3. Sa **durée de mesure**  $T$  qui correspondra au temps, relatif à l'observateur associé à la cellule type, pour effectuer la mesure.

**Définition 44.** *Un instrument de mesure de la grandeur  $(h_i)_{i \in \mathcal{G}}$  définie sur  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$  (def.43) dont les caractéristiques sont  $Sp, B_L$  et  $T$ , est un système physique qui a les propriétés suivantes :*

1. À partir d'un instant  $t_0 \in I$ , il transforme le « sous-domaine »  $(\mathcal{C}_{B_L}, g)$  de  $(\mathcal{C}, g)$  en un « domaine »  $(\mathcal{C}', g')$  pour lesquels :
  - (a)  $\mathcal{C}_{B_L} = I \times B_L \times S^1(\delta) \times W$
  - (b)  $\mathcal{C}' = ]t_0, t_0 + T[ \times (\bigcup_{i \in Sp} B_i) \times S^1(\delta) \times W$   
 où  $]t_0, t_0 + T[ \subset I$  et les  $B_i$  sont des cubes de  $\mathbb{R}^3$  disjoints 2 à 2 (ou du moins qui ont leurs intersections 2 à 2 de mesure nulle) chacun isométrique à  $B_L$ .
  - (c)  $\forall i \in Sp \quad g'_{B_i} = |a_i|^{4/n-2} g_0$  où  $a_i : ]t_0, t_0 + T[ \times B_i \times S^1(\delta) \times W \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par :

$$a_i = \sum_{l=1}^m \langle a, h_{il} \rangle_{B_L} (h_{il} \circ \sigma_i)$$

Ici  $\sigma_i$  désigne l'isométrie entre  $B_i$  et  $B_L$  ( $h_{il} \circ \sigma_i$  peut être considérée définie sur  $\mathcal{C}_i := ]t_0, t_0 + T[ \times B_i \times S^1(\delta) \times W$ ). On rappelle que  $\langle f_1, f_2 \rangle_{B_L} := \frac{2}{L^3} \int_{B_L} f_1 f_2$ .

2. Pour chaque  $i \in Sp$ , l'instrument de mesure estime le nombre moyen de singularités élémentaires se trouvant dans  $B_i$  pendant le temps  $(t, u) \in ]t_0, t_0 + T[ \times S^1(\delta)$ . (Lorsque  $n_i(t, u)$  désigne le nombre de singularités élémentaires se trouvant au temps  $(t, u)$  dans  $\mathcal{H}_i := \{t\} \times B_i \times \{u\} \times W$ , le nombre moyen est défini par  $\bar{n}_i := \frac{1}{2\pi\delta T} \int_{S^1(\delta)} \int_{t_0}^{t_0+T} n_i(t, u) du dt$ ).

On peut résumer succinctement les propriétés demandées à un tel instrument de mesure en disant que celui-ci « sépare en espace » les « composantes » qui nous intéressent de la métrique sur

laquelle on effectue les mesures, puis analyse le domaine créé (« séparé en espace ») en comptant les singularités élémentaires qui s'y trouvent. Un exemple de tel instrument de mesure est donné par un prisme qui décompose la lumière constituée de  $p$  impulsions distinctes de même direction en la répartissant sur  $p$  domaines (arc en ciel). Dans ce cas les métriques oscillantes considérées sont à masse nulle (cf. section.2.16).

Lorsque la grandeur  $(h_i)_{i \in \mathcal{G}}$  est définie sur  $I \in \mathbb{R}$ , la définition d'un instrument de mesure de cette grandeur est analogue à la définition 44 précédente, seule la condition 1.(c) est différente.

**Définition 45.** *Un instrument de mesure de la grandeur  $(h_i)_{i \in \mathcal{G}}$  définie sur  $I \in \mathbb{R}$  (def.43) dont les caractéristiques sont  $S, p, B_L$  et  $T$ , est un système physique qui a les propriétés suivantes :*

1. À partir d'un instant  $t_0 \in I$ , il transforme le « sous-domaine »  $(\mathcal{C}_{B_L}, g)$  de  $(\mathcal{C}, g)$  en un « domaine »  $(\mathcal{C}', g')$  pour lesquels :

(a) Idem définition 44

(b) Idem définition 44

- (c)  $\forall i \in S, p \quad g'_{B_i} = |a_i|^{4/n-2} g_0$  où  $a_i : \mathcal{C}_i := ]t_0, t_0 + T[ \times B_i \times S^1(\delta) \times W \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par :

$$a_i = \left( \sum_{l=1}^m \left( \frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a_{\mathcal{C}_L} h_{il} dt \right) h_{il} \right) \circ \sigma_i$$

Ici  $\mathcal{C}_L := ]t_0, t_0 + T[ \times B_L \times S^1(\delta) \times W$  et on rappelle que, dans le cadre de cette définition,  $h_i$  est une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ .  $\sigma_i$  est l'isométrie entre  $B_i$  et  $B_L$  prolongée naturellement par « l'identité » entre  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_L$ .

2. Idem définition 44

Il est important de remarquer que les instruments de mesure que l'on vient de présenter mesurent des grandeurs relatives à la **métrique** conforme à un potentiel mais n'ont aucun lien avec les singularités se trouvant dans l'espace temps « avant » la mesure.

### Exemples de mesures d'impulsion et d'énergie

On reprend l'exemple de la métrique oscillante élémentaire d'ordre 1 présenté au début de cette section :

La métrique  $g$  s'écrit :  $g = |a|^{4/n-2} g_0$  et la fonction  $a$  est de la forme particulière :

$a = \beta \sum_{j=1}^p \varphi_j$  où,  $\forall j$  de 1 à  $p$ ,  $\varphi_j : \Theta \times S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  vérifie :

$$\varphi_j = C_j \cos(M_j t + Qu - \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk} x^k) + C'_j \sin(M_j t + Qu - \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk} x^k).$$

$C_j$  et  $C'_j$  sont ici des constantes,  $\beta \in E_W(\mu)$ ,  $Q$  est la charge électrique relative.

1. Considérons une **mesure de l'impulsion** effectuée sur cette métrique oscillante à l'aide de l'instrument de mesure décrit dans la définition 44.

Comme nous allons le voir, les conditions essentielles pour que l'instrument de mesure « sépare correctement en espace » chacun des  $\beta \varphi_j$  sont les suivantes :

$$\forall j \neq j' \in \{1..p\} \quad L|\vec{\lambda}_j - \vec{\lambda}_{j'}| >> 1 \quad \text{et} \quad L|\vec{\lambda}_j| >> 1 \quad (2.67)$$

où  $|\vec{\lambda}_j| := \sup(|\lambda_{j_1}|, |\lambda_{j_2}|, |\lambda_{j_3}|)$  et  $L$  est la longueur des côtés du cube qui définit le domaine de mesure.

Le fait que  $\forall j \in \{1..p\} \quad L|\vec{\lambda}_j| \gg 1$  permet d'écrire le résultat suivant :

$\forall j \in \{1..p\}, \quad \forall \vec{q} \in Sp$

$$\langle \varphi_j, h_1 \vec{q} \rangle_{B_L} h_1 \vec{q} + \langle \varphi_j, h_2 \vec{q} \rangle_{B_L} h_2 \vec{q} \simeq \varphi_j \quad \text{si } L|\vec{\lambda}_j - \vec{q}| \ll 1 \quad (2.68)$$

$$\langle \varphi_j, h_1 \vec{q} \rangle_{B_L} h_1 \vec{q} + \langle \varphi_j, h_2 \vec{q} \rangle_{B_L} h_2 \vec{q} \simeq 0 \quad \text{si } L|\vec{\lambda}_j - \vec{q}| \gg 1 \quad (2.69)$$

où  $|\vec{\lambda}_j - \vec{q}| := \sup(|\lambda_{j_1} - q_1|, |\lambda_{j_2} - q_2|, |\lambda_{j_3} - q_3|)$ .

Ceci s'obtient en utilisant des égalités de la forme suivante ici écrites pour simplifier en « dimension 1 » (alors qu'elles sont en « dimension 3 ») :  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall q \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \cos(\lambda x) \cos(qx) dx &= \frac{2}{L(\lambda+q)} \sin \frac{L}{2}(\lambda+q) + \frac{2}{L(\lambda-q)} \sin \frac{L}{2}(\lambda-q) \quad \text{si } \lambda \neq q \\ &= 1 + \frac{1}{L\lambda} \sin(L\lambda) \quad \text{si } \lambda = q \end{aligned}$$

$$\frac{2}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \cos(\lambda x) \sin(qx) dx = 0 \quad \text{et l'on a :}$$

$$\frac{2}{L(\lambda-q)} \sin \frac{L}{2}(\lambda-q) \simeq 1 \quad \text{si } L|\lambda-q| \ll 1$$

$$\frac{2}{L(\lambda-q)} \sin \frac{L}{2}(\lambda-q) \simeq 0 \quad \text{si } L|\lambda-q| \gg 1$$

On déduit de 2.67 2.68 et 2.69 que :  $\forall j \in \{1..p\} \quad \forall \vec{q} \in Sp$

$$\begin{aligned} \langle a, h_1 \vec{q} \rangle_{B_L} h_1 \vec{q}_{B_L} + \langle a, h_2 \vec{q} \rangle_{B_L} h_2 \vec{q}_{B_L} &\simeq \beta \varphi_{j \in \mathcal{L}} \quad \text{si } L|\vec{\lambda}_j - \vec{q}| \ll 1 \\ &\simeq 0 \quad \text{si } L|\vec{\lambda}_j - \vec{q}| \gg 1 \end{aligned}$$

Alors (def.44) le domaine  $(\mathcal{C}', g')$  créé par l'instrument de mesure est tel que  $g' = |a'|^{4/n-2} g_0$  où la fonction  $a'$  vérifie les propriétés suivantes : pour chaque  $j \in \{1..p\}$

$$a'_{\mathcal{C}' \vec{q}} \simeq \beta \varphi_j \circ \sigma \vec{q} \quad \text{si } \vec{q} \in Sp \text{ vérifie } L|\vec{\lambda}_j - \vec{q}| \ll 1$$

$$\simeq 0 \quad \text{si } \vec{q} \in Sp \text{ vérifie } L|\vec{\lambda}_j - \vec{q}| \gg 1$$

où  $\mathcal{C}' \vec{q} := ]t_0, t_0 + T[ \times B \vec{q} \times S^1(\delta) \times W$ .

Ceci signifie que la fonction  $a'$  est  $\simeq 0$  sur les domaines  $\mathcal{C}' \vec{q}$  lorsque  $\vec{q}$  est « éloigné » de tous les  $\vec{\lambda}_j$  (c.a.d. lorsque  $L|\vec{\lambda}_j - \vec{q}| \gg 1$ ) et que  $a'$  est « très proche » d'une fonction représentant une métrique oscillante élémentaire **homogène** sur  $\mathcal{C}' \vec{q}$  lorsque  $\vec{q}$  est « très proche » d'un  $\vec{\lambda}_j$  (c.a.d. lorsque  $L|\vec{\lambda}_j - \vec{q}| \ll 1$ ).

On suppose maintenant que le spectre est suffisamment « riche » pour que l'on puisse choisir pour chaque  $j \in \{1..p\}$ , un  $\vec{q}_j \in Sp$  tel que  $L|\vec{\lambda}_j - \vec{q}_j| \ll 1$  (bien entendu, ce choix fait que l'on ne va décrire qu'un résultat partiel relativement aux données de l'instrument de mesure).

On peut alors écrire :  $\forall j \in \{1..p\}$

$$a'_{\mathcal{C}' \vec{q}_j} \simeq \beta \varphi_j \circ \sigma \vec{q}_j$$

où  $\varphi_j(t, x, u) = C_j \cos(M_j t + Qu - \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk} x^k) + C'_j \sin(M_j t + Qu - \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk} x^k)$   
 et  $(\mathcal{C}'_{\vec{q}_j}, |a'|^{4/n-2} g_0)$  est isométrique à  $(\mathcal{C}_L, |\beta \varphi_j|^{4/n-2} g_0)$ .

On en déduit, d'après les résultats de la section 2.14 que, si à un instant  $t \in ]t_0, t_0 + T[$  une singularité élémentaire «  $\varsigma$  » se trouve dans  $\bigcup_{j=1}^p \mathcal{H}_j(t)$  où  $\mathcal{H}_j(t) := \{t\} \times B_{\vec{q}_j} \times S^1(\delta) \times W$ , alors la probabilité qu'elle soit dans un  $\mathcal{H}_j(t)$  est  $(C_j^2 + C_j'^2) / \sum_{j=1}^p (C_j^2 + C_j'^2)$  puisque les  $B_{\vec{q}_j}$  sont disjoints 2 à 2 (ou du moins ont leurs intersections 2 à 2 de mesure nulle). Cette probabilité ne dépend pas de  $t$ .

Ce résultat est comparable à celui donné par la physique quantique standard (précisé en 2.18.1). Cependant l'interprétation liée à la physique que nous présentons est, comme on vient de le voir, profondément différente. Il est en particulier important de remarquer que les singularités élémentaires que l'on observe dans les  $\mathcal{H}_j(t)$  et dont on connaît la probabilité de présence, n'ont rien à voir avec les singularités se trouvant dans le domaine  $I \times \Omega \times S^1(\delta) \times W$  pour  $t < t_0$  c'est à dire avant la mesure.

### Comparaison entre les conditions 2.67 et la relation d'incertitude « position-impulsion »

Comme on l'a déjà précisé, l'impulsion  $\vec{\lambda}_j$  est donnée par  $\vec{\lambda}_j = M_j \vec{v}_j$  où  $M_j$  est la fréquence de masse et  $\vec{v}_j = (v_1, v_2, v_3)$  est la vitesse à laquelle se déplace la métrique oscillante élémentaire homogène. Dans le système d'unités SI on a  $M_j = m_j c / \hbar$  où  $m_j$  est la masse (en kg) (def.25) et  $\vec{v}_j = (v_1, v_2, v_3)$  (en  $ms^{-1}$ ) est donnée par  $\vec{v}_j = c \vec{v}_j$ .

Les conditions 2.67 s'écrivent donc aussi, lorsque l'on note  $\vec{p}_j = m_j \vec{v}_j = \frac{m_0}{(1-|\vec{v}_j|^2/c^2)^{1/2}} \vec{v}_j$  l'impulsion « standard » :

$$\forall j \neq j' \in \{1..p\} \quad L|\vec{p}_j - \vec{p}_{j'}| >> \hbar \quad \text{et} \quad L|\vec{p}_j| >> \hbar \quad (2.70)$$

L'inégalité  $L|\vec{p}_j - \vec{p}_{j'}| >> \hbar$  est à rapprocher de la relation d'incertitude classique en physique quantique qui lie les mesures de *position* et d'*impulsion* d'une particule. L'interprétation des inégalités 2.70 est néanmoins assez différente. Rappelons que la notion de *mesure de position* est, pour nous, définie pour les **singularités élémentaires** alors que celle de *mesure d'impulsion* que l'on vient de présenter concerne les **métriques conformes à un potentiel**, la relation d'incertitude de la physique quantique standard perd donc, pour nous, tout son sens. Les inégalités 2.70 disent simplement que si l'on mesure des impulsions à l'aide de l'instrument de mesure (def.44) et que l'on souhaite que celui-ci « sépare correctement en espace » la métrique initiale en métrique oscillantes élémentaire homogènes (pour lesquelles la notion d'impulsion est naturellement définie), alors le domaine de mesure  $B_L$  doit être suffisamment « grand » relativement aux impulsions considérées (l'inégalité  $L|\vec{p}_j| >> \hbar$  précise que l'on ne peut mesurer, sans les critères que l'on vient de préciser, une impulsion « trop petite »).

2. Considérons maintenant une **mesure de l'énergie** effectuée sur cette même métrique oscillante à l'aide de l'instrument de mesure décrit dans la définition 45.



La condition essentielle pour que l'instrument de mesure « sépare correctement en espace » chacun des  $\beta\varphi_j$  est la suivante :

$$\forall j \neq j' \in \{1..p\} \quad T(M_j - M_{j'}) \gg 1 \quad \text{et} \quad TM_j \gg 1 \quad (2.71)$$

Des calculs analogues (plus rapides ici) à ceux de la partie précédente montrent que :

$$\forall j \in \{1..p\} \quad \forall e \in Sp$$

$$\left(\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a_{\mathcal{C}_L} h_{1e} dt\right)(h_{1e})_{]t_0, t_0+T[} + \left(\frac{2}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} a_{\mathcal{C}_L} h_{2e} dt\right)(h_{2e})_{]t_0, t_0+T[} \simeq \beta\varphi_{j \in \mathcal{C}_L}$$

$$\text{si } T|M_j - e| << 1$$

$$(\text{On rappelle que } h_e(t) = (h_{1e}(t), h_{2e}(t)) = (\cos(et), \sin(et)))$$

Alors (def.45) le domaine  $(\mathcal{C}', g')$  créé par l'instrument de mesure est tel que  $g' = |a'|^{4/n-2} g_0$  où la fonction  $a'$  vérifie les propriétés suivantes : pour chaque  $j \in \{1..p\}$

$$a'_{\mathcal{C}'_e} \simeq \beta\varphi_j \circ \sigma_e \quad \text{si } e \in Sp \text{ vérifie } T|M_j - e| << 1$$

$$\simeq 0 \quad \text{si } e \in Sp \text{ vérifie } T|M_j - e| \gg 1$$

où  $\sigma_e$  désigne l'isométrie entre  $B_e$  et  $B_L$  et  $\mathcal{C}'_e := ]t_0, t_0 + T[ \times B_e \times S^1(\delta) \times W$ .

Ceci signifie que la fonction  $a'$  est  $\simeq 0$  sur les domaines  $\mathcal{C}'_e$  lorsque  $e$  est « éloigné » de tous les  $M_j$  (c.a.d. lorsque  $T|M_j - e| \gg 1$ ) et que  $a'$  est « très proche » d'une fonction représentant une métrique oscillante élémentaire homogène sur  $\mathcal{C}'_e$  lorsque  $e$  est « très proche » d'un  $M_j$  (c.a.d. lorsque  $T|M_j - e| << 1$ ).

On suppose maintenant que le spectre est suffisamment « riche » pour que l'on puisse choisir pour chaque  $j \in \{1..p\}$ , un  $e_j \in Sp$  tel que  $T|M_j - e_j| << 1$  (bien entendu, ce choix fait que l'on ne va décrire qu'un résultat partiel relativement aux données de l'instrument de mesure).

On peut alors écrire :  $\forall j \in \{1..p\}$

$$a'_{\mathcal{C}'_{e_j}} \simeq \beta\varphi_j \circ \sigma_{e_j}$$

$$\text{où } \varphi_j(t, x, u) = C_j \cos(M_j t + Qu - \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk} x^k) + C'_j \sin(M_j t + Qu - \sum_{k=1}^3 \lambda_{jk} x^k)$$

$$\text{et } (\mathcal{C}'_{e_j}, |a'|^{4/n-2} g_0) \text{ est isométrique à } (\mathcal{C}_L, |\beta\varphi_j|^{4/n-2} g_0).$$

On en déduit, d'après les résultats de la section 2.14 que, si à un instant  $t \in ]t_0, t_0 + T[$  une singularité élémentaire «  $\varsigma$  » se trouve dans  $\bigcup_{j=1}^p \mathcal{H}_j(t)$  où  $\mathcal{H}_j(t) := \{t\} \times B_{e_j} \times S^1(\delta) \times W$ , alors la probabilité qu'elle soit dans un  $\mathcal{H}_j(t)$  est  $(C_j^2 + C_j'^2) / \sum_{j=1}^p (C_j^2 + C_j'^2)$  puisque les  $B_{e_j}$  sont disjoints 2 à 2 (ou du moins ont leurs intersections 2 à 2 de mesure nulle). Cette probabilité ne dépend pas de  $t$ .

Là encore ce résultat est comparable à celui que donne la physique quantique standard.

### Comparaison entre les conditions 2.71 et la relation d'incertitude « temps-énergie »

Les conditions 2.71 écrites dans les unités SI deviennent :

$$\forall j \neq j' \in \{1..p\} \quad \mathcal{T} |m_j c^2 - m_{j'} c^2| \gg \hbar \quad \text{et} \quad \mathcal{T} m_j c^2 \gg \hbar \quad (2.72)$$

où  $\mathcal{T}$  (en s) est défini par  $c\mathcal{T} = T$  et puisque  $M_j = m_j c / \hbar$ .

L'inégalité  $\mathcal{T}|m_j c^2 - m_j c^2| \gg \hbar$  est à rapprocher de la relation d'incertitude *temps-énergie* de la physique quantique classique bien que, tout comme celle *position-impulsion* l'interprétation en soit, pour nous, assez différente. (Il est à noter que les conditions 2.71 ne font pas intervenir la « dimension » de  $B_L$  qui, ici, a peu d'importance).

### 2.18.3 Les grandeurs liées aux variétés compactes de la cellule type et leurs mesures

La cellule type considérée est de la forme  $\mathcal{C} = I \times \Omega \times V_1 \times V_2$  où  $V_1$  et  $V_2$  sont deux variétés compactes. Nous nous intéressons aux « grandeurs » définies sur  $V_1$ .

Les définitions de *grandeurs*, *instruments de mesure de ces grandeurs* que l'on va préciser, partent des mêmes principes que l'on a utilisés pour les grandeurs définies sur l'espace apparent, mais maintenant la compacité de  $V_1$  (qui permet d'utiliser le théorème spectral (section 2.5)) simplifie grandement les choses.

On considère un espace propre  $E_{V_1}(\mu)$  du laplacien  $\Delta_{g_{V_1}}$ . Sur celui-ci est défini naturellement le produit scalaire suivant :

$$\langle \beta_1, \beta_2 \rangle := (\text{vol} V_1)^{-1} \int_{V_1} \beta_1 \beta_2 \quad (2.73)$$

**Définition 46.** Une *grandeur définie sur*  $E_{V_1}(\mu)$  est une famille  $(h_i)_{i \in \mathcal{G}}$  de fonctions définies sur  $V_1$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$  ( $m \geq 1$ ) telle que la réunion des  $m$  familles composantes  $(h_{1,i})_{i \in \mathcal{G}}, \dots, (h_{m,i})_{i \in \mathcal{G}}$  forme une famille orthonormée (pour le produit scalaire 2.73) de fonctions propres appartenant à  $E_{V_1}(\mu)$ .

D'après le théorème spectral cette famille est finie.

Là encore, la dénomination de la grandeur (grandeur spin par exemple) sera souvent affectée à l'élément  $i$  de  $\mathcal{G}$ .

**Définition 47.** Un *instrument de mesure de la grandeur*  $(h_i)_{i \in \mathcal{G}}$  définie sur  $V_1$  dont les trois caractéristiques sont  $S, p, B_L$  et  $T$  est un système physique qui a les propriétés suivantes :

1. À partir d'un instant  $t_0 \in I$ , il transforme le « sous-domaine »  $(\mathcal{C}_{B_L}, g)$  de  $(\mathcal{C}, g)$  en un « domaine »  $(\mathcal{C}', g')$  pour lesquels :

(a)  $\mathcal{C}_{B_L} = I \times B_L \times V_1 \times V_2$

(b)  $\mathcal{C}' = ]t_0, t_0 + T[ \times (\bigcup_{i \in S, p} B_i) \times V_1 \times V_2$

où  $]t_0, t_0 + T[ \subset I$  et les  $B_i$  sont des cubes de  $\mathbb{R}^3$  disjoints 2 à 2 (ou du moins qui ont leurs intersections 2 à 2 de mesure nulle) chacun isométrique à  $B_L$ .

- (c)  $\forall i \in S, p \quad g'_{B_i} = |a_i|^{4/n-2} g_0$  où  $a_i : \mathcal{C}_i := ]t_0, t_0 + T[ \times B_i \times V_1 \times V_2 \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par :

$$a_i = \sum_{l=1}^m (\langle \alpha_{\mathcal{C}_{B_L}}, h_{il} \rangle h_{il}) \circ \sigma_i$$

Ici  $\sigma_i$  désigne l'isométrie entre  $B_i$  et  $B_L$  étendue naturellement par « l'identité » en une isométrie entre  $\mathcal{C}_i$  et  $\mathcal{C}_{B_L}$ .

2. Pour chaque  $i \in Sp$ , l'instrument de mesure estime le nombre moyen de singularités élémentaires se trouvant dans  $B_i$  pendant le temps  $(t, u) \in ]t_0, t_0 + T[ \times S^1(\delta)$ . (Lorsque  $n_i(t, u)$  désigne le nombre de singularités élémentaires se trouvant au temps  $(t, u)$  dans  $\mathcal{H}_i := \{t\} \times B_i \times \{u\} \times W$ , le nombre moyen est défini par  $\bar{n}_i := \frac{1}{2\pi\delta T} \int_{S^1(\delta)} \int_{t_0}^{t_0+T} n_i(t, u) du dt$ ).

Bien entendu, les instruments de mesure décrits par les définitions 44, 45 et 47 sont « idéalisés ». En réalité les mesures des *grandeurs* que l'on a citées dans cette section et qui interviennent dans les phénomènes quantiques, sont délicates. On peut considérer qu'une chambre à bulles (à fils ou à dérive) est une « association » d'instruments de mesure tels qu'on les a définis (mais très imparfaits).

Les instruments de mesure (fictifs) que l'on a décrits dans cette section sont basés, comme on l'a vu, sur une « séparation en espace » des différentes « composantes » de la métrique conforme à un potentiel considérée. D'autres types d'instruments de mesure (réels) sont cependant utilisés et certains sont basés sur la provocation de *phénomènes de résonance* (résonance magnétique par exemple) et donnent souvent des résultats très précis. Ils ne peuvent s'assimiler à ceux que l'on a présentés ici.

La section suivante est consacrée à un exemple important de mesure de grandeur liée aux variétés compactes : La mesure de spin. L'étude en est détaillée car c'est avec cette notion que sera présenté le phénomène d'« intrication quantique » dans la section 2.20.

## 2.19 Mesure de spin

### 2.19.1 Faisceau de métrique oscillante et « état de spin »

De nombreuses expériences sont basées sur l'envoi de « faisceaux de particules ». Cette notion, exprimée dans le langage de la physique classique, se traduit pour nous par celle de « faisceaux de métriques oscillantes ».

Les métriques oscillantes considérées sont les métriques oscillantes élémentaires homogènes se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  dans un potentiel neutre, définies dans la section 2.8. Ce sont celles pour lesquelles la notion de vitesse (et d'impulsion) est bien définie. Nous nous limitons ici aux métriques oscillantes d'ordre 2 avec spin 1/2 (cf. 2.15.7) mais la généralisation ne pose pas de difficultés. On rappelle (def.29 et généralisation 2.8.2) que, pour une métrique élémentaire homogène d'ordre 2 et de spin 1/2 définie sur la cellule  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$ , la métrique  $g = |a|^{4/n-2} g_0$  correspondante est telle que :

$$a = \beta \left( \sum_{l=1}^4 (C_l \cos(M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k + Qu) + C'_l \sin(M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k + Qu)) \right) \alpha_l \quad (2.74)$$

où  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  est une base orthonormée de l'espace propre  $E_{S^3(\rho)}(\gamma)$  (que l'on peut aussi considérer comme une base de  $E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$ ),  $\beta \in E_V(v)$ ,  $\vec{v} = 1/M'(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$  et  $M' = (1 - |\vec{v}|^2)^{-1/2} M$ .

La fonction  $a$  vérifie l'équation fondamentale 2.3 :  $\square_{g_0} a + S a = 0$ .

La fonction canonique associée :  $a_c : \Theta \rightarrow E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$  et la fonction d'état  $\Psi : \Theta \rightarrow E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$  vérifient alors (cf. 2.18.1 étendu à l'ordre 2) :

$$a_c = \sum_{l=1}^4 (C_l + iC'_l) e^{-i(M't - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k)} \alpha_l \quad (2.75)$$

lorsque  $Q > 0$ , et est égale au conjugué lorsque  $Q < 0$ .

$$\Psi = \sum_{l=1}^4 (C_l + iC'_l) e^{-i((M'-M)t - \sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k)} \alpha_l \quad (2.76)$$

quel que soit  $Q$ .

Le terme « faisceau » précise le fait que les métriques oscillantes considérées sont définies sur un « tube » de la cellule  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$  où  $\Theta = I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ . Les coordonnées canoniques de  $\mathcal{U}$  seront notées plus conventionnellement  $(x, y, z)$ . On considère par exemple le « tube »  $T(r_1, y_1, y_2) := D(r_1) \times y_1, y_2 \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V \subset \mathcal{U} \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$  où  $D(r_1)$  est le disque de rayon euclidien  $r_1$  centré en  $O$  dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  et  $y_1, y_2$  est un intervalle de l'axe  $\vec{y}$ . On a choisi ici  $\vec{y}$  comme axe du tube, le disque  $D(r_1)$  lui étant perpendiculaire. Bien entendu, on étendra, si besoin est, cette définition à un tube d'axe quelconque.

On donne alors la définition suivante.

**Définition 48.** *Un domaine de type faisceau de métrique oscillante dans un potentiel neutre, de spin 1/2, de rayon  $r_1$  et d'axe  $\vec{y}$  est un domaine  $(\mathcal{C}, g)$  où  $g = |a|^{4/n-2} g_0$  et la fonction  $a : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$  (supposée régulière) vérifie :*

1.  $a|_{I \times T(r_1)}$  est de la forme donnée en (2.74) lorsque  $\sum_{k=1}^3 \lambda_k x^k$  est remplacé par  $(\lambda y)$  pour préciser que la vitesse  $\vec{v}$  a pour direction  $\vec{y}$ .
2.  $a|_{\mathcal{C} - (I \times T(r_2))} = C^{te}$  où  $0 \leq C^{te} \leq 1$  et  $r_2 = r_1 + \varepsilon$ .  
( $\varepsilon$  est en général choisi  $< r_1$  et ne sert qu'à permettre la régularité de la fonction  $(a)$  sur  $\mathcal{C}$ ).

(La condition 2. n'a pas une grande importance pour la suite, elle signifie que dans le domaine considéré, la métrique sera approximativement celle d'un potentiel neutre).

Il est simplificateur pour la suite d'introduire la notion d'« état de spin » d'une métrique oscillante homogène dans un potentiel neutre, on donne donc la définition suivante.

**Définition 49.** *L'état de spin d'une métrique oscillante homogène d'ordre 2 avec spin 1/2 est l'élément  $\zeta \in E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$  obtenu à partir de la fonction d'état  $\Psi$  précisée en (2.76) en posant :*

$$\zeta = \frac{\sum_{l=1}^4 (C_l + iC'_l) \alpha_l}{(\sum_{l=1}^4 |C_l + iC'_l|^2)^{1/2}} \quad (2.77)$$

Bien entendu, cette définition s'étend sans difficultés à des « spin » autres que 1/2.

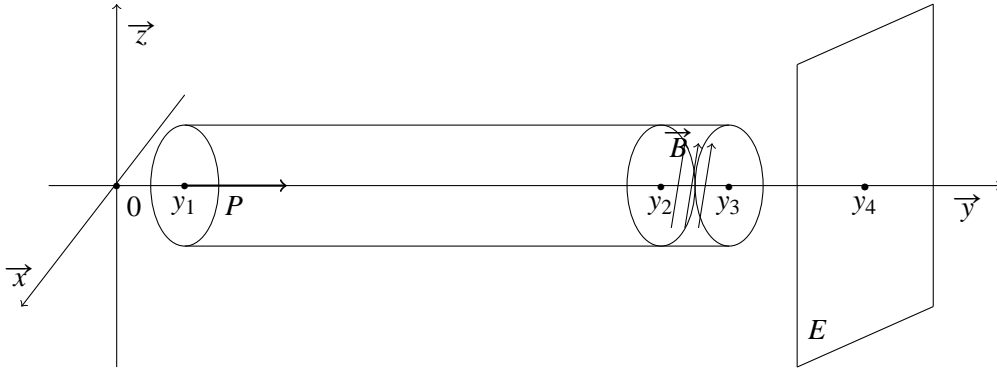


FIGURE 2.1 – L'appareil de Stern-Gerlach

### 2.19.2 L'appareil de Stern-Gerlach idéalisé. La mesure de spin

Le principe de l'expérience de Stern-Gerlach (Figure 2.1), décrit en langage classique, est le suivant :

On envoie des particules (voire des atomes) avec une vitesse bien définie dans une zone où règne un champ magnétique inhomogène dirigé suivant une direction orthogonale à la vitesse initiale des particules. on mesure la déviation éventuelle des particules par ce gradient de champ magnétique en regardant les impacts sur un écran orthogonal à la direction du jet de particules.

Le champ magnétique  $\vec{B}$  est nul sur le domaine pour lequel  $y \in ]y_1, y_2[ \cup ]y_3, y_4[$ , il est dirigé dans une direction orthogonale à  $\vec{y}$  et a un gradient non nul sur le domaine pour lequel  $y \in ]y_2, y_3[$ .

Pour nous, en terme de métrique oscillante, l'expérience de Stern-Gerlach se présente de la manière suivante :

On considère la cellule  $\mathcal{C} = ]t_1, t_2[ \times \omega \times S^1 \times S^3 \times V$  où  $\omega$  est la réunion d'un tube  $T_1(r_1, y_1, y_2)$  d'axe  $\vec{y}$  de rayon  $r_1$  (sur lequel  $\vec{B} = 0$ ), d'un tube  $T_2(r_2, y_2, y_3)$  (sur lequel  $\vec{B} \neq 0$ ) avec  $r_2 > r_1$ , d'un tube  $T_3(r_2, y_3, y_4)$  (sur lequel  $\vec{B} = 0$ ).

La métrique  $g = |a|^{4/n-2} g_0$  définie sur la cellule  $\mathcal{C}$  est celle d'une métrique oscillante élémentaire d'ordre 2, que l'on supposera de spin 1/2. Sa fonction d'état est notée  $\varphi$ .

La cellule  $\mathcal{C}_{y_1, y_2} = ]t_1, t_2[ \times T_1(r_1, y_1, y_2) \times S^1 \times S^3 \times V$  munie de la métrique  $|a|^{4/n-2} g_0$  définit un domaine de type « faisceau de métrique oscillante » (def.48). Sur cette cellule,  $\varphi$  est donc de la forme :

$$\varphi|_{\mathcal{C}_{y_1, y_2}} = \sum_{l=1}^4 (C_l + iC'_l) e^{-i((M'-M)t - \lambda y)} \alpha_l \quad (2.78)$$

L'état de spin associé (def.49) est  $\zeta = \sum_{l=1}^4 (C_l + iC'_l) \alpha_l$ . L'égalité (2.78) constitue donc une forme de « condition initiale » pour la fonction  $\varphi$ .

D'après le corollaire 1 de la section 2.15.4, la fonction d'état  $\varphi$  est solution de l'équation 2.51. On choisit la base orthonormée  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$  de  $E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma)$  pour laquelle les quatre composantes de  $\varphi$  vérifient les équations (2.60) (2.61) (2.62) (2.63).

Comme nous ne nous intéressons qu'à l'« effet de spin », nous allons négliger, dans l'opérateur différentiel  $(\alpha)$ , les termes qui ont le coefficient  $Q$ , ce qui, en langage de la physique classique, revient à dire que nous ne nous intéressons qu'aux déviations liées au spin et non aux éventuelles déviations liées à la charge électrique dans le potentiel électromagnétique.

Compte tenu du fait que la composante  $(B^2)$  du champ électromagnétique est ici nulle, les quatre équations (2.60) (2.61) (2.62) (2.63) s'écrivent :

$$\begin{aligned} -2iM \frac{\partial \varphi^1}{\partial t} &= \square_{\Theta} \varphi^1 + 2Q(B^1 \varphi^2 - B^3 \varphi^1) \\ -2iM \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} &= \square_{\Theta} \varphi^2 + 2Q(B^1 \varphi^1 + B^3 \varphi^2) \\ -2iM \frac{\partial \varphi^3}{\partial t} &= \square_{\Theta} \varphi^3 + 2Q(B^1 \varphi^4 - B^3 \varphi^3) \\ -2iM \frac{\partial \varphi^4}{\partial t} &= \square_{\Theta} \varphi^4 + 2Q(B^1 \varphi^3 + B^3 \varphi^4) \end{aligned}$$

Les deux premières équations sont identiques aux deux dernières lorsque  $\varphi^1$  devient  $\varphi^3$  et  $\varphi^2$  devient  $\varphi^4$ .

La fonction d'état  $\varphi$  peut être considérée comme la somme de deux fonctions d'état  $\varphi'$  et  $\varphi''$  correspondant à la superposition de deux métriques oscillantes, la première fonction d'état ayant  $(\varphi^1, \varphi^2, 0, 0)$  pour composantes dans la base  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)$  et la deuxième  $(0, 0, \varphi^3, \varphi^4)$ . En physique classique ceci correspond à l'envoi de deux particules de même masse et charge électrique, mais éventuellement avec un état de spin différent. Le résultat de la mesure de l'appareil de Stern-Gerlach donne, lorsqu'un impact a lieu sur l'écran, la probabilité que celui-ci soit dans un des deux domaines disjoints de l'écran (pour le spin 1/2). Ce résultat sera facilement obtenu pour la superposition des deux métriques oscillantes si l'on sait l'obtenir pour celle correspondant à la fonction d'état  $\varphi'$  car les calculs sont identiques pour  $\varphi''$ . En effet, ceci est la conséquence des deux faits suivants :

1.  $E_1^{\mathbb{C}} := E_{S^3(\rho)}^{\mathbb{C}}(\gamma) = E_1'^{\mathbb{C}} \oplus E_1''^{\mathbb{C}}$  où  $E_1'^{\mathbb{C}}$  est le sous-espace vectoriel engendré par  $\beta_1$  et  $\beta_2$  et  $E_1''^{\mathbb{C}}$  celui engendré par  $\beta_3$  et  $\beta_4$
2. Les endomorphismes  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$  sont stables sur  $E_1'^{\mathbb{C}}$  et  $E_1''^{\mathbb{C}}$  compte tenu de la forme de leurs matrices dans la base des  $\beta_k$  donnée en 2.15.7.

On introduit alors la terminologie suivante :

**Définition 50.** L'espace  $E_1^{\mathbb{C}}$  est appelé **l'espace propre restreint** (Il est de dimension complexe 2 et correspond à l'espace des états de spin 1/2 de la physique quantique standard).

Les endomorphismes  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$  restreints à  $E_1^{\mathbb{C}}$  notés  $\hat{S}'_1, \hat{S}'_2, \hat{S}'_3$  sont appelés **les endomorphismes canoniques restreints**.

Les matrices dans la base  $(\beta_1, \beta_2)$  des endomorphismes canoniques restreints  $\hat{S}'_1$  et  $\hat{S}'_3$  (les seuls qui vont nous intéresser car  $B^2 = 0$ ) sont donc :

$$\hat{M}'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{M}'_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On a, bien entendu, les mêmes résultats si l'on considère  $E_1^{\prime\prime\mathbb{C}}$  et  $\hat{S}''_1, \hat{S}''_3$ .

**Dans la suite de cette section nous considérerons donc que les fonctions d'état sont à valeurs dans l'espace propre restreint  $E_1^{\prime\mathbb{C}}$ . Les états de spin (def.49) des métriques oscillantes homogènes d'ordre 2 avec spin 1/2 qui vont intervenir seront alors des éléments de  $E_1^{\prime\mathbb{C}}$ .**

Sur la cellule  $\mathcal{C}_{y_2, y_3}$  de l'appareil de Stern-Gerlach idéalisé, le champ magnétique est de la forme  $\vec{B} = \mathcal{B}\vec{s}$  où  $\vec{s}$  est un vecteur unitaire dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$  et  $\mathcal{B}$  est une fonction non constante dépendant d'une variable réelle notée  $s = (\cos \theta)z + (\sin \theta)x$  et l'on supposera  $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial s} > 0$  pour qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur le sens de  $\vec{s}$ . L'angle  $\theta$  est précisé dans la définition suivante.

*Définition 51. On appelle **angle de mesure** de l'appareil de Stern-Gerlach, l'angle  $\theta \in ]-\pi, \pi[$  donné par  $\cos \theta = (\vec{s}/\vec{k})$ ,  $\sin \theta = (\vec{s}/\vec{i})$  où  $\vec{i}$  et  $\vec{k}$  sont les vecteurs unitaires des axes  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ .*

Le champ magnétique  $\vec{B}$  s'écrit donc  $\vec{B} = \mathcal{B}(\cos \theta \vec{k} + \sin \theta \vec{i})$  et les deux composantes de  $\varphi'$  (considérée maintenant à valeurs dans  $E_1^{\prime\mathbb{C}}$ ) dans la base  $(\beta_1, \beta_2) : (\varphi^1, \varphi^2)$ , vérifient, compte tenu des approximations déjà précisées, les deux équations :

$$-2iM \frac{\partial \varphi^1}{\partial t} = \square_{\Theta} \varphi^1 + 2Q\mathcal{B}((\sin \theta)\varphi^2 - (\cos \theta)\varphi^1) \quad (2.79)$$

$$-2iM \frac{\partial \varphi^2}{\partial t} = \square_{\Theta} \varphi^2 + 2Q\mathcal{B}((\sin \theta)\varphi^1 + (\cos \theta)\varphi^2) \quad (2.80)$$

On définit l'endomorphisme  $\hat{S}_{\theta}$  de  $E_1^{\prime\mathbb{C}}$  en posant :

$$\hat{S}_{\theta} := (\sin \theta)\hat{S}'_1 + (\cos \theta)\hat{S}'_3 \quad (2.81)$$

Celui-ci a pour matrice relative à la base  $(\beta_1, \beta_2)$  :

$$\hat{M}_{\theta} = \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Les deux équations précédentes peuvent alors s'écrire sous la forme suivante :

$$-2iM \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = \Delta \varphi' + 2Q\mathcal{B}\hat{S}_{\theta}(\varphi')$$

On vérifie facilement que le couple suivant :

$$\beta'_1 := (\cos \theta/2)\beta_1 - (\sin \theta/2)\beta_2, \quad \beta'_2 := (\sin \theta/2)\beta_1 + (\cos \theta/2)\beta_2 \quad (2.82)$$

forme une base de vecteurs propres de  $\hat{S}_{\theta}$ , orthonormée dans  $E_1^{\prime\mathbb{C}}$ , ceci pour les valeurs propres respectives  $(-1)$  et  $(+1)$ .

La matrice de rotation  $R_{\theta/2}$  suivante :

$$R_{\theta/2} = \begin{pmatrix} \cos \theta/2 & -\sin \theta/2 \\ \sin \theta/2 & \cos \theta/2 \end{pmatrix}$$

vérifie alors l'égalité :  $R_{\theta/2} \hat{M}_\theta = J R_{\theta/2}$  où  $J$  est la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que les deux composantes  $\varphi'^1$  et  $\varphi'^2$  de  $\varphi'$  dans cette base, vérifient les deux équations, maintenant indépendantes :

$$-2iM \frac{\partial \varphi'^1}{\partial t} = \square_\Theta \varphi'^1 + 2_Q Q \mathcal{B} \varphi'^1 \quad (2.83)$$

$$-2iM \frac{\partial \varphi'^2}{\partial t} = \square_\Theta \varphi'^2 - 2_Q Q \mathcal{B} \varphi'^2 \quad (2.84)$$

Chacune de ces équations est identique à celle qui permet de décrire, en physique quantique classique, la répartition des impacts sur l'écran lorsque les « particules » sont sous l'influence d'un potentiel qui ici est donné par la fonction  $2_Q Q \mathcal{B}$  pour l'équation 2.83 et par la fonction  $-2_Q Q \mathcal{B}$  pour l'équation 2.84. On peut considérer que  $2_Q Q \mathcal{B}$  (resp.  $-2_Q Q \mathcal{B}$ ) représente un potentiel électrique, le champ électrique correspondant est alors  $\vec{E} = 2_Q Q \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial s} \vec{s}$  (resp.  $\vec{E} = -2_Q Q \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial s} \vec{s}$ ), ce qui, en physique classique, « dévie » les particules dans un sens suivant la direction  $\vec{s}$  pour l'équation 2.83 et dans l'autre sens pour l'équation 2.84.

Nous ne détaillons pas cette étude ici, mais donnons les résultats qualitatifs dans la proposition suivante (sans démonstration) :

*Proposition 12. Dans un domaine pour lequel  $y_3 < y < y_4$  (c'est à dire après la sortie de champ magnétique  $\vec{B}$ ), la fonction (a) caractéristique de la métrique  $g = |a|^{4/n-2} g_0$ , est approximativement nulle en dehors de deux domaines disjoints  $\mathcal{D}_1 = ]t_1, t_2[ \times \omega_1 \times S^1 \times S^3 \times V$  et  $\mathcal{D}_2 = ]t_1, t_2[ \times \omega_2 \times S^1 \times S^3 \times V$  où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont deux « tubes » disjoints inclus dans la partie limitée par  $y_3$  et  $y_4$  (fig.2.1). Les deux « taches d'impacts » sur l'écran, classiques pour le spin  $1/2$ , sont limitées par l'intersection de ces deux tubes avec l'écran. Les axes des tubes  $\omega_1$  et  $\omega_2$ , notés  $\vec{y}_1$  et  $\vec{y}_2$ , intersectent l'axe  $\vec{y}$ . La fonction d'état de la métrique oscillante restreinte à  $\mathcal{D}_1$  est  $\varphi'_1 \beta'_1|_{]t_1, t_2[ \times \omega_1}$ , on peut l'assimiler à celle d'un faisceau de métrique oscillante d'axe  $\vec{y}_1$  (def.48). Il en est de même pour la fonction d'état de la métrique oscillante restreinte à  $\mathcal{D}_2$ .*

L'étude de ce phénomène est identique à celle faite par la physique quantique standard puisque, si l'on utilise les  $\varepsilon$ -approximations, les équations (2.83) et (2.84) se ramènent à celles vérifiées par la fonction d'état de cette dernière. De plus, l'analyse probabiliste faite en terme de « singularités » pour nous, donne des résultats qui correspondent aussi à ceux de la physique quantique standard comme on l'a vu dans la section 2.14. Les résultats précis sont donnés dans la proposition 13 qui va suivre dans le cadre d'un appareil de Stern-Gerlach idéalisé. Dans ce but, nous continuons l'étude de la manière suivante :

Sur le domaine pour lequel  $y \in ]y_1, y_2[$  (fig.2.1), la fonction d'état  $\varphi'$  est celle du faisceau de métrique oscillante homogène se déplaçant à une vitesse  $\vec{v} = \lambda \vec{j}$  où  $\lambda$  est positif et  $\vec{j}$  est le vecteur unitaire de l'axe  $\vec{y}$ . Restreinte à ce domaine on la notera  $\varphi'_0$ .



D'après 2.78 et puisque l'on considère la restriction à  $E_1^{\mathbb{C}}$ , la fonction  $\varphi'_0$  s'écrit sous la forme :

$$\varphi'_0 = e^{-i((M'-M)t-\lambda y)}(z_1\beta_1 + z_2\beta_2) \quad (2.85)$$

où  $z_1$  et  $z_2 \in \mathbb{C}$

D'après la définition 2.75, l'état de spin du faisceau entrant dans l'appareil de Stern-Gerlach est  $z_1\beta_1 + z_2\beta_2$ .

Si l'on considère la fonction  $\epsilon : \Theta \rightarrow \mathbb{C}$  définie par :

$$\epsilon := e^{-i((M'-M)t-\lambda y)} \quad (2.86)$$

alors, sur le domaine où  $y \in ]y_1, y_2[$ , les deux composantes de  $\varphi'_0$  dans la base  $(\beta_1, \beta_2)$ , que l'on notera  $\varphi_0^1$  et  $\varphi_0^2$ , s'écrivent :

$$\varphi_0^1 = z_1\epsilon \quad \varphi_0^2 = z_2\epsilon$$

Les composantes de  $\varphi'_0$  dans la base  $(\beta'_1, \beta'_2)$  précisée en 2.82 (et sur le domaine où  $y \in ]y_1, y_2[$ ) sont donc :

$$\varphi_0'^1 = ((\cos \theta/2)z_1 - (\sin \theta/2)z_2)\epsilon \quad (2.87)$$

$$\varphi_0'^2 = ((\sin \theta/2)z_1 + (\cos \theta/2)z_2)\epsilon \quad (2.88)$$

Elles sont, bien sûr, solutions des équations 2.83 et 2.84 dans le domaine où  $y \in ]y_1, y_2[$  (puisque le champ magnétique  $\vec{B}$  y est nul. On peut les considérer comme des « conditions initiales » qui déterminent  $\varphi'^1$  et  $\varphi'^2$  sur le domaine « entier », en particulier celui où  $y \in ]y_3, y_4[$  (qui donne la « mesure de spin »).

Pour obtenir un résultat précis sur cette « mesure de spin » par l'appareil de Stern-Gerlach, nous précisons maintenant les données sur le champ magnétique  $\vec{B}$  dans le domaine où  $y \in ]y_2, y_3[$ . On a déjà supposé que  $\vec{B} = \mathcal{B}\vec{s}$  où  $\mathcal{B}$  dépend de la variable  $s = (\cos \theta)z + (\sin \theta)x$ . Nous supposons maintenant que  $\mathcal{B}$  est une fonction impaire (on peut, par exemple, considérer que, par une approximation linéaire,  $\mathcal{B} = (\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial s}(0))s$ . Comme, sous cette condition,  $\mathcal{B}(0) = 0$ , le champ  $\vec{B}$  est nul sur l'axe  $\vec{s}$  et ceci peut être vu comme un moyen de négliger les « déviations » (en langage de physique classique) autres que celles liées au « spin ». Bien entendu,  $\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial s}(0) \neq 0$ . le choix d'imparité de la fonction  $\mathcal{B}$  va permettre d'utiliser la propriété suivante :

$$\mathcal{B} \circ \sigma = -\mathcal{B}$$

où  $\sigma$  désigne l'isométrie de  $\mathbb{R}^3$  définie par  $\sigma(x, y, z) = (-x, y, -z)$ .

*Proposition 13. On suppose que la condition suivante est réalisée :*

*Le domaine où  $y \in ]y_1, y_2[$  (fig.2.1) est un domaine de type « faisceau de métrique oscillante dans un potentiel neutre de spin 1/2 et d'axe  $\vec{s}$  » (def.48), son état de spin est  $\zeta = z_1\beta_1 + z_2\beta_2$  (def.49) où  $(\beta_1, \beta_2)$  est la base de  $E_1^{\mathbb{C}}$  dans laquelle les équations 2.79 et 2.80 sont vérifiées. L'angle de mesure de l'appareil de Stern-Gerlach (def.51) est noté  $\theta$ .*

Alors :

Si à un instant  $t \in ]t_1, t_2[$ ,  $\varsigma$  est une singularité élémentaire dans  $\mathcal{H}(t) := \{t\} \times (\omega_1 \cup \omega_2) \times S^1 \times S^3 \times V$ , où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont précisés dans la proposition (12), la probabilité pour que celle-ci soit dans  $\mathcal{H}_1(t) := \{t\} \times \omega_1 \times S^1 \times S^3 \times V$  est :

$$p_1(t) = \frac{|(\cos \theta/2)z_1 - (\sin \theta/2)z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \quad (2.89)$$

(Bien entendu, la probabilité pour que celle-ci soit dans  $\mathcal{H}_2(t) := \{t\} \times \omega_2 \times S^1 \times S^3 \times V$  est :

$$p_2(t) = \frac{|(\sin \theta/2)z_1 + (\cos \theta/2)z_2|^2}{|z_1|^2 + |z_2|^2} = 1 - p_1(t).$$

On a choisi ici pour  $\omega_1$  (resp.  $\omega_2$ ) le domaine associé à la composante  $\varphi'_1$  (resp.  $\varphi'_2$ ) de la fonction d'état et donc à la valeur propre  $(-1)$  (resp.  $(+1)$ ) de l'endomorphisme  $\hat{S}_\theta$  défini par l'égalité (2.81).

La probabilité donnée par (2.89) s'écrit donc aussi de la manière suivante :

$$p_1(t) = |\langle \zeta, \zeta'_1 \rangle|^2 \quad (2.90)$$

où  $\langle, \rangle$  désigne le produit hermitien de l'espace propre restreint  $E_1^{\mathbb{C}}$  (def.50),

$\zeta$  est l'état de spin du faisceau de métrique oscillante défini sur le domaine pour lequel

$y \in ]y_1, y_2[$ ,  $\zeta'_1 := (\cos \theta/2)\beta_1 - (\sin \theta/2)\beta_2$  est le vecteur propre de  $\hat{S}_\theta$  défini par l'égalité (2.81).

Les résultats donnés par cette proposition concordent bien avec les résultats de la physique quantique standard (et avec les résultats expérimentaux).

**Démonstration** : d'après la condition initiale imposée, la restriction de la fonction d'état  $\varphi'$  au domaine pour lequel  $y \in ]y_1, y_2[$  s'écrit :  $\varphi'_0 = \varphi'_0{}^1\beta'_1 + \varphi'_0{}^2\beta'_2$  où  $\varphi'_0{}^1$  et  $\varphi'_0{}^2$  vérifient (2.87) et (2.88) et  $\beta'_1, \beta'_2$  sont définis par les égalités (2.82).

Notons  $\Psi : \Theta \supset \omega \rightarrow \mathbb{C}$  la solution de l'équation (2.83) qui vérifie  $\Psi = \epsilon$  sur le domaine pour lequel  $y \in ]y_1, y_2[$ , où  $\epsilon$  est définie par (2.86). Alors, puisque  $\epsilon \circ \sigma = \epsilon$  et  $\mathcal{B} \circ \sigma = -\mathcal{B}$ ,

$\Psi \circ \sigma$  est solution de l'équation (2.84) et  $\Psi \circ \sigma = \epsilon$  sur le domaine pour lequel  $y \in ]y_1, y_2[$ . De plus,  $\omega_1 = \sigma(\omega_2)$  où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont les deux tubes disjoints intervenant dans la proposition 12.

De la linéarité des équations on déduit que :

$$\varphi'_1 = ((\cos \theta/2)z_1 - (\sin \theta/2)z_2)\Psi \quad \text{et} \quad \varphi'_2 = ((\sin \theta/2)z_1 + (\cos \theta/2)z_2)(\Psi \circ \sigma).$$

D'après la section 2.14 et son extension dans 2.15.6, si, à un instant  $t$ , une singularité élémentaire  $\varsigma$  est dans  $\mathcal{H}(t)$ , alors la probabilité pour que celle-ci soit dans  $\mathcal{H}_1(t)$  est :

$$p_1(t) = \frac{\int_{\omega_1} |\varphi'_1|^2(t, x^i) dx^i}{\int_{\omega_1} |\varphi'_1|^2(t, x^i) dx^i + \int_{\omega_2} |\varphi'_2|^2(t, x^i) dx^i}$$

Alors,

$$p_1(t) = \frac{|(\cos \theta/2)z_1 - (\sin \theta/2)z_2|^2}{|(\cos \theta/2)z_1 - (\sin \theta/2)z_2|^2 + |(\sin \theta/2)z_1 + (\cos \theta/2)z_2|^2}$$

$$\text{car : } \int_{\omega_1} |\Psi(t, x^i)|^2 dx^i = \int_{\omega_2} |\Psi(t, \sigma(x^i))|^2 dx^i$$

Ce qui termine la démonstration de l'égalité (2.89) puisque :

$$|(\cos \theta/2)z_1 - (\sin \theta/2)z_2|^2 + |(\sin \theta/2)z_1 + (\cos \theta/2)z_2|^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2$$

L'égalité (2.90) en découle immédiatement puisque :

$$\langle \zeta, \zeta'_1 \rangle = \langle z_1\beta_1 + z_2\beta_2, (\cos \theta/2)\beta_1 - (\sin \theta/2)\beta_2 \rangle = (\cos \theta/2)z_1 - (\sin \theta/2)z_2$$

**Cas particulier où il existe  $\theta' \in ]-\pi, \pi)$  tel que l'état de spin soit un vecteur propre de l'endomorphisme  $\hat{S}_{\theta'}$**

*Définition 52. L'angle  $\theta' \in ]-\pi, \pi)$  tel que l'état de spin  $\zeta$  est un vecteur propre de  $\hat{S}_{\theta'}$  est appelé l'angle de l'état de spin.*

*L'état de spin est alors noté  $\zeta_{\theta'}$ .*

Notons  $E_{\theta'}(-1)$  et  $E_{\theta'}(+1)$  les espaces propres de l'endomorphisme  $\hat{S}_{\theta'}$  relatifs aux valeurs propres  $(-1)$  et  $(+1)$ . Les vecteurs propres de norme 1 pour  $\langle, \rangle$  dans  $E_{\theta'}(-1)$  sont tous de la forme :  $\zeta_{\theta',k} = e^{ik}((\cos \theta'/2)\beta_1 - (\sin \theta'/2)\beta_2)$  où  $k \in \mathbb{R}$ .

Alors :

$$\zeta_{\theta',k}^\perp = \zeta_{\theta'-\pi,k} = e^{ik}((\sin \theta'/2)\beta_1 + (\cos \theta'/2)\beta_2) \quad (2.91)$$

est un vecteur propre de  $E_{\theta'}(+1)$ .

*Définition 53.  $\zeta_{\theta',k}^\perp$  donné par l'égalité 2.91 est appelé l'orthogonal canonique de  $\zeta_{\theta',k}$ .*

(Tout autre orthogonal de norme 1 de  $\zeta_{\theta',k}$  est de la forme  $e^{ik'}\zeta_{\theta',k}^\perp$  où  $k' \in \mathbb{R}$ ).

Dans le cas où l'état de spin du faisceau de métrique oscillante est de la forme  $\zeta_{\theta',k}$ , la proposition 13 a une conclusion dont l'écriture est très simple, précisée dans le corollaire suivant.

*Corollaire 2. Sous les hypothèses de la proposition 13 et lorsque l'état de spin  $\zeta$  a la forme  $\zeta_{\theta',k} \in E_{\theta'}(-1)$  définie précédemment, alors la probabilité  $p_1(t)$  donnée par (2.89) s'écrit :*

$$p_1(t) = \cos^2\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \quad (2.92)$$

En effet, d'après (2.90) :

$$\begin{aligned} p_1(t) &= |\langle e^{ik}((\cos \theta'/2)\beta_1 - (\sin \theta'/2)\beta_2), (\cos \theta/2)\beta_1 - (\sin \theta/2)\beta_2 \rangle|^2 \\ &= (\cos \theta'/2 \cos \theta/2 + \sin \theta'/2 \sin \theta/2)^2 = \cos^2\left(\frac{\theta - \theta'}{2}\right) \end{aligned}$$

### 2.19.3 L'appareil de Stern-Gerlach idéalisé vu comme appareil de mesure correspondant à la définition (47)

. On précise ici la correspondance entre un instrument de mesure basé sur l'expérience de Stern-Gerlach et la notion d'« instrument de mesure » donnée par la définition (47) de la section 2.18.

On se limite au « spin 1/2 », bien que la généralisation ne pose pas de difficultés conceptuelles. L'angle de mesure de l'appareil de Stern-Gerlach idéalisé (def.51) est noté  $\theta$ .

Les premières notions sont les suivantes :

Le cube  $B_L$  introduit dans 1(a) de la définition (47) est un cube contenu dans le domaine  $y_1, y_2(\times D(r_1))$  de l'appareil de Stern-Gerlach (fig.2.1).

On note  $\beta_{\theta,-1}$  un vecteur propre normalisé de l'endomorphisme  $\hat{S}_\theta$  défini par l'égalité (2.81) relatif à la valeur propre (-1) et  $\beta_{\theta,+1}$  son orthogonal canonique (def.53) (alors relatif à la valeur propre (+1)).

La « grandeur spin » correspondant à la définition (46) est la famille  $(h_i)_{i \in \mathcal{G}}$  de fonctions définies sur  $S^1(\delta) \times S^3(\rho)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  où  $\mathcal{G}$  (ici égal au spectre  $S_\rho$ ) est l'ensemble à deux éléments que l'on notera  $\{-1, +1\}$ . Les fonctions  $h_{-1}$  et  $h_{+1} : S^1(\delta) \times S^3(\rho) \rightarrow \mathbb{R}^2$  sont définies par :

$$h_{-1} := (\eta_1 \beta_{\theta,-1}, \eta_2 \beta_{\theta,-1}), \quad h_{+1} := (\eta_1 \beta_{\theta,+1}, \eta_2 \beta_{\theta,+1})$$

où  $(\eta_1, \eta_2)$  est la base orthonormée de  $E_{S^1(\delta)}(\lambda)$  donnée par :

$$\eta_1(u) = \sqrt{2} \cos(Qu) \quad \text{et} \quad \eta_2(u) = \sqrt{2} \sin(Qu).$$

Les deux cubes  $B_{-1}$  et  $B_{+1}$  introduits dans 1(b) de la définition (47) sont deux cubes tels que  $B_{-1} \subset \omega_1$  et  $B_{+1} \subset \omega_2$  où  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont définis dans la proposition 12. On les considérera isométriques à  $B_L$  par  $\sigma_{-1}$  et  $\sigma_{+1}$ .

Le faisceau de métrique oscillante « entrant » dans l'appareil de Stern-Gerlach (def.48), sur lequel on effectue la mesure de spin, a pour métrique  $g = |a|^{4/n-2} g_0$  où la fonction (a) est de la forme  $a = \beta\Phi$ . Ici, d'après (2.74),  $\Phi$  vérifie :

$$\Phi = \sum_{k=1}^2 (C_k \cos(M't - \lambda y + Qu) + C'_k \sin(M't - \lambda y + Qu)) \alpha_k$$

Les fonctions  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  qui forment une base orthonormée de  $E_1^{\mathbb{C}}$  sont choisies telles que

$$\alpha_1 = \beta_{\theta,-1} \quad \text{et} \quad \alpha_2 = \beta_{\theta,+1}.$$

Les fonctions  $a_{-1}$  et  $a_{+1}$  définies dans 1(c) de la définition (47) sont alors :

$$a_{-1} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} ((C_1 \cos(M't - \lambda y) + C'_1 \sin(M't - \lambda y)) \eta_1 + (C'_1 \cos(M't - \lambda y) - C_1 \sin(M't - \lambda y)) \eta_2) \beta_{\theta,-1} \circ \sigma_{-1}$$

$$a_{+1} = \frac{\beta}{\sqrt{2}} ((C_2 \cos(M't - \lambda y) + C'_2 \sin(M't - \lambda y)) \eta_1 + (C'_2 \cos(M't - \lambda y) - C_2 \sin(M't - \lambda y)) \eta_2) \beta_{\theta,+1} \circ \sigma_{+1}$$

Il s'en suit que les fonctions canoniques associées sont :

$$a_{-1,c} = z_{\theta,-1} e^{-i(M't - \lambda y)} \quad (2.93)$$

$$a_{+1,c} = z_{\theta,+1} e^{-i(M't - \lambda y)} \quad (2.94)$$

où  $z_{\theta,-1} := \frac{1}{\sqrt{2}}(C_1 + iC'_1)$  et  $z_{\theta,+1} := \frac{1}{\sqrt{2}}(C_2 + iC'_2)$ .

Comme exposé dans la proposition 12, la fonction canonique  $a_{-1,c}$  (resp.  $a_{+1,c}$ ) correspondant à la métrique oscillante dans le domaine où  $\omega_1 \subset B_{-1}$  (resp.  $\omega_2 \subset B_{+1}$ ) est celle donnée par (2.93) (resp. (2.94)). On en déduit donc que : si, à un instant  $t$ , une singularité  $\varsigma$  « est vue » dans  $\omega_1 \cup \omega_2$ , la probabilité qu'elle soit vue dans  $\omega_1$  est (cf. 2.42) :

$$p(t) = \frac{|z_{\theta,-1}|^2}{|z_{\theta,-1}|^2 + |z_{\theta,+1}|^2}$$

**Ce résultat correspond bien à celui obtenu dans la proposition 13.** En effet, d'après (2.82) :

$$\beta_{\theta,-1} = \beta'_1 = (\cos \theta/2)\beta_1 - (\sin \theta/2)\beta_2 \quad \text{et} \quad \beta_{\theta,+1} = \beta'_2 = (\sin \theta/2)\beta_1 + (\cos \theta/2)\beta_2$$

Alors :

$$z_{\theta,-1} = (\cos \theta/2)z_1 - (\sin \theta/2)z_2 \quad \text{et} \quad z_{\theta,+1} = (\sin \theta/2)z_1 + (\cos \theta/2)z_2$$

(On a ici, pour simplifier, considéré une singularité  $\varsigma$  à un instant  $t$  donné, et non un nombre moyen de singularités pendant le temps  $(t, u) \in ]t_0, t_0 + T[ \times S^1(\delta)$  comme présenté en 2 de la définition (47)).

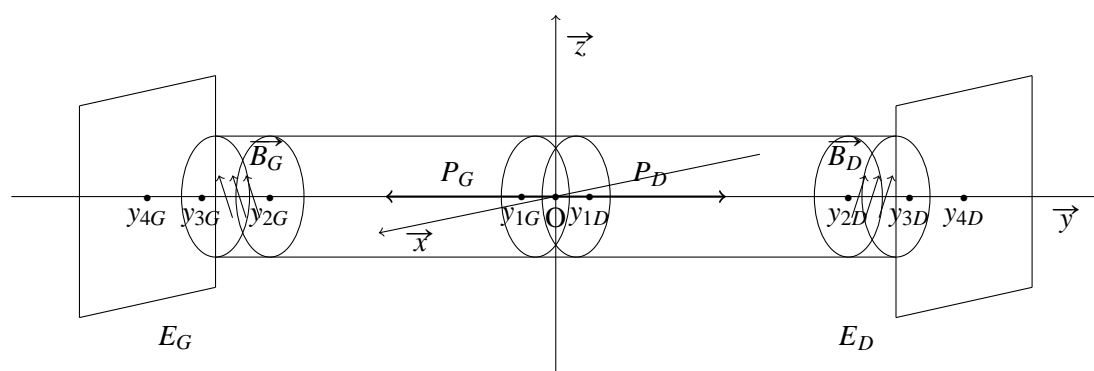


FIGURE 2.2 – Le double appareil de Stern-Gerlach

## 2.20 L'intrication quantique

Cette section est consacrée à l'étude d'un phénomène physique qui est décrit correctement avec l'axiomatique de la physique quantique classique mais qui ne peut l'être dans le cadre d'une théorie des particules plus classique, quelles que soient les caractéristiques qu'on leur donne. L'observation effective de ce phénomène a été un des arguments qui a privilégié la théorie quantique au détriment de théories éventuelles plus classiques. Le lecteur pourra obtenir plus de précisions sur ce sujet en consultant les ouvrages spécialisés de mécanique quantique (par exemple [3]). Nous allons cependant montrer que ce phénomène peut être décrit correctement dans le cadre de la théorie présentée dans ce papier.

Pour la clarté de l'exposé, nous nous concentrerons, dans toute cette section, sur l'expérience suivante décrite en langage « classique » : Dans le domaine du tube présenté dans la figure 2.2 pour lequel  $y \in ]y_{1G}, y_{1B}[$ , sont « créées » deux particules  $P_G$  et  $P_D$ , chacune de spin  $1/2$ .  $P_G$  est lancée vers un appareil de Stern-Gerlach (cf. section 2.19) situé à gauche,  $P_D$  vers un appareil de Stern-Gerlach situé à droite. Ces appareils mesurent le spin des particules et sont constitués chacun d'un champ magnétique  $\vec{B}$  ( $\vec{B}_G$  pour celui de gauche,  $\vec{B}_D$  pour celui de droite) inhomogène mais approximativement formé de vecteurs parallèles dont la direction peut être choisie quelconque dans le plan  $(\vec{x}, \vec{z})$ , puis d'un écran  $E$  ( $E_G$  et  $E_D$ ).

Chacune des particules, après avoir traversé le champ magnétique  $\vec{B}$  de l'appareil correspondant, marque son impact sur l'écran  $E$ . Le spin des particules étant «  $1/2$  », les impacts n'ont lieu que sur deux zones distinctes de chaque écran concerné, ce qui donne la mesure de spin (binaire) de la particule.

On notera  $(+1_G), (-1_G)$  (resp.  $(+1_D), (-1_D)$ ) les deux mesures possibles pour la particule  $P_G$  (resp.  $P_D$ ).

On s'intéresse à la probabilité d'obtenir des couples de mesures simultanées :  $(+1_G, +1_D)$ ,  $(+1_G, -1_D)$ ,  $(-1_G, +1_D)$ ,  $(-1_G, -1_D)$ , et ceci suivant l'orientation de  $\vec{B}_G$  relative à  $\vec{B}_D$ . Expérimentalement, c'est une étude statistique qui est réalisée, on effectue plusieurs fois une expérience identique à celle que l'on vient de décrire.

Le fait remarquable, déduit de l'expérience, est que le résultat statistique obtenu sur les 4 valeurs

possibles des « couples de mesures » que l'on vient d'écrire, ne peut s'expliquer que si **la mesure du spin d'une particule a une influence sur la mesure du spin de l'autre**. Ceci exclut toute interprétation en terme de « deux particules indépendantes » au sens classique.

On résume dans les lignes qui suivent les arguments qui permettent d'arriver à cette conclusion. Pour cela, on introduit la **fonction de corrélation**  $E(\vec{B}_G, \vec{B}_D)$ . Cette fonction est égale, pour les orientations de  $\vec{B}_G$  et  $\vec{B}_D$  précisées, à la valeur moyenne du produit des résultats de mesure  $((+1)$  ou  $(-1))$  des appareils de Stern-Gerlach situés à gauche et à droite. On a nécessairement  $|E(\vec{B}_G, \vec{B}_D)| \leq 1$ .

On effectue les couples de mesures pour deux directions différentes du champ magnétique à gauche  $(\vec{B}_G, \vec{B}'_G)$  et deux directions du champ magnétique à droite  $(\vec{B}_D, \vec{B}'_D)$ .

On définit la quantité :

$$S = E(\vec{B}_G, \vec{B}_D) + E(\vec{B}_G, \vec{B}'_D) + E(\vec{B}'_G, \vec{B}_D) - E(\vec{B}'_G, \vec{B}'_D) \quad (2.95)$$

(On somme trois des valeurs et on soustrait la quatrième).

On montre alors que, pour toute « théorie à variables cachées locale », dont la définition est précisée par exemple dans [3], l'inégalité suivante, appelée « inégalité de Bell », est vérifiée (il existe plusieurs inégalités de Bell de ce type) :

$$|S| \leq 2 \quad (2.96)$$

L'axiomatique de la physique quantique classique (qui ne correspond pas à une théorie à variables cachées locale) donne, pour l'expérience que l'on vient de décrire et avec un bon choix des quatre directions de mesures  $\vec{B}_G, \vec{B}'_G, \vec{B}_D, \vec{B}'_D$ , le résultat théorique  $|S| = 2\sqrt{2}$  qui est en contradiction avec l'inégalité de Bell (2.96).

L'expérience, effectuée à Orsay [1] par A.Aspect, P.Grangier et G.Roger (que l'on notera par la suite A,G,R), obtient un résultat pour lequel  $|S|$  est très proche de  $2\sqrt{2}$  (la petite différence avec cette valeur est justifiée par les caractéristiques des appareils utilisés).

Cette expérience utilise des paires de photons émises par une cascade atomique d'atomes de calcium provoquée par des rayons lasers, ce ne sont donc pas des « spin 1/2 » que l'on a mesurés mais des « polarités », cependant la transposition de la théorie d'une notion à l'autre ne pose pas de difficultés et donne des résultats identiques.

On commence par rappeler rapidement les principes de la mécanique quantique standard qui permettent d'obtenir les résultats sus-cités. L'analyse du phénomène avec le point de vue de notre théorie sera présentée dans la sous-section 2.20.2, ce sera là le point essentiel de la section 2.20.

### 2.20.1 L'expérience de type A,G,R [1] vue par la physique quantique standard

Les données axiomatiques de la physique quantique standard que l'on va utiliser sont les suivantes :

1. L'espace des états de spin 1/2 d'une particule est un espace de Hilbert  $(\mathcal{E}, \langle, \rangle)$  de dimension complexe 2 que l'on pourra assimiler à  $\mathbb{C}^2$  muni du produit hermitien standard.

2. Les trois observables de spin  $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$  liées aux directions  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ , sont des endomorphismes hermitiens dont les matrices sont :

$$\hat{M}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{M}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{M}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Le coefficient  $\hbar/2$  qui apparaît habituellement, où  $\hbar$  est la constante de Planck, a été ici supprimé sans qu'il n'y ait de conséquences sur les phénomènes étudiés ici).

Plus généralement, l'observable de spin  $\hat{S}_{\vec{u}}$  liée à une direction  $\vec{u} = \sin \theta \cos \phi \vec{i} + \sin \theta \sin \phi \vec{j} + \cos \theta \vec{k}$  a pour matrice :

$$\hat{M}_{\vec{u}} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta e^{-i\phi} \\ \sin \theta e^{i\phi} & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

On remarquera que les valeurs propres de  $\hat{S}_{\vec{u}}$  sont  $(-1)$  et  $(+1)$ .

3. La probabilité d'obtenir  $(-1)$  (resp.  $(+1)$ ) pour la mesure de spin liée à la direction  $\vec{u}$  d'une particule dont l'état de spin normalisé est  $\xi \in \mathcal{E}$  est donnée par :

$$p = |\langle \xi_{\vec{u}}, \xi \rangle|^2$$

où  $\xi_{\vec{u}}$  est un vecteur propre normalisé de l'endomorphisme  $\hat{S}_{\vec{u}}$  pour la valeur propre  $(-1)$  (resp.  $(+1)$ ).

4. Pour une paire de particules  $(P_1, P_2)$ , l'espace des états de spin est :  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ . Comme la dimension de  $\mathcal{E}$  est 2 pour le spin 1/2, tout élément de  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$  se met sous la forme  $\Psi = \xi^1 \otimes \xi^2 + \xi^3 \otimes \xi^4$ .  $\Psi$  est au maximum de rang 2, c'est dans cette situation qu'apparaît la notion d'« états intriqués ».
5. Pour une paire de particules  $(P_1, P_2)$  dont la fonction d'état normalisée  $\Psi \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ , lorsque l'on effectue une mesure de spin sur la particule  $P_1$  liée à la direction  $\vec{u}_1$  et une mesure de spin sur la particule  $P_2$  liée à la direction  $\vec{u}_2$ , la probabilité d'obtenir  $(-1, -1)$  (resp.  $(-1, +1), (+1, -1), (+1, +1)$ ) est :

$$p = |\langle \xi_{\vec{u}_1} \otimes \xi_{\vec{u}_2}, \Psi \rangle_{\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}}|^2$$

où  $\xi_{\vec{u}_1}$  est un vecteur propre normalisé de  $\hat{S}_{\vec{u}_1}$  pour la valeur propre  $(-1)$  (resp.  $(+1)$ ) et  $\xi_{\vec{u}_2}$  un vecteur propre normalisé de  $\hat{S}_{\vec{u}_2}$  pour la valeur propre  $(-1)$  (resp.  $(+1)$ ).

6. Si, pour une paire  $(P_1, P_2)$  de particules de spin 1/2 dont la fonction d'état normalisée est  $\Psi \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$ , on n'effectue qu'une mesure de spin sur (par exemple)  $P_1$  liée à la direction  $\vec{u}_1$  (sans se préoccuper de  $P_2$ ), la probabilité d'obtenir la mesure  $(-1)$  (resp.  $(+1)$ ) est :

$$p = \sum_{k=1}^2 |\langle \xi_{\vec{u}_1} \otimes \xi_k, \Psi \rangle|^2$$

où  $\xi_{\vec{u}_1}$  est un vecteur propre normalisé de  $\hat{S}_{\vec{u}_1}$  pour la valeur propre  $(-1)$  (resp.  $(+1)$ ) et  $(\xi_1, \xi_2)$  est une base orthonormée de  $\mathcal{E}$  (le résultat ne dépend pas du choix de la base).



*Remarque 32.* Le lecteur fera le parallèle entre l'espace des états donné en 1. (et les observables de spin données en 2.) avec l'espace propre restreint (et les endomorphismes restreints) définis dans (def.50). Il est important de remarquer que les premiers sont des données axiomatiques abstraites de la physique quantique classique alors que ceux définis dans le cadre de notre théorie sont des données précises définies à partir de la géométrie de  $S^3$  qui est un des éléments de l'espace-temps de dimension  $n$ .

Dans le cadre de l'expérience du type « A,G,R [1] » la fonction d'état normalisée de la paire de particules  $(P_1, P_2)$  est supposée être de la forme :  $\Psi = \frac{1}{2}(\xi \otimes \xi + \xi^\perp \otimes \xi^\perp)$  et est de rang 2. Ici  $\xi$  est de norme 1 dans  $\mathcal{E}$  et  $\xi^\perp$ , bien choisi, vérifie  $\langle \xi^\perp, \xi \rangle = 0$ .

Lorsque l'on applique l'axiome 5., la probabilité d'obtenir  $(-1, -1)$  (resp.  $(-1, +1), (+1, -1), (+1, +1)$ ) comme mesure de spin de  $(P_1, P_2)$  liée aux directions  $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$  est :

$$p = |\langle \xi_{\vec{u}_1} \otimes \xi | \xi_{\vec{u}_2} \otimes \xi \rangle + \langle \xi_{\vec{u}_1} \otimes \xi^\perp | \xi_{\vec{u}_2} \otimes \xi^\perp \rangle|^2$$

où  $\xi_{\vec{u}_1}$  (resp.  $\xi_{\vec{u}_2}$ ) est un vecteur propre normalisé de  $\hat{S}_{\vec{u}_1}$  (resp.  $\hat{S}_{\vec{u}_2}$ ) pour la valeur propre  $(-1)$  (resp.  $(+1)$ ).

Ceci permet de calculer la fonction de corrélation  $E(., .)$  pour deux directions  $\vec{u}_1$  et  $\vec{u}'_1$  relatives à  $P_1$  et deux directions  $\vec{u}_2$  et  $\vec{u}'_2$  relatives à  $P_2$  puis de calculer la grandeur  $S$  définie par (2.95). On vérifie ensuite, par des bons choix des directions de mesure  $\vec{u}_1, \vec{u}'_1, \vec{u}_2, \vec{u}'_2$ , que  $|S| > 2$ , ce qui contredit l'inégalité de Bell (2.96).

*Remarque 33.* En physique quantique classique, le fait que, dans un système physique, il existe un nombre précis de particules est une notion bien définie. L'espace des états est alors axiomatiquement donné par le produit tensoriel des espaces des états de chaque type de particule. Dans le cadre de notre théorie, les choses sont profondément différentes, seules les métriques oscillantes sont parfaitement définies. Les singularités (cf.section 2.13) qui, lors d'une mesure (cf.2.18), donnent l'équivalent de la présence de particules en physique quantique classique, ne sont gérées que par le principe d'équiprobabilité relative à la métrique  $g$  (cf.2.14) et seule une « estimation probabiliste » a un sens pour nous. Cela fait qu'il est difficile d'établir un parallèle mathématique entre l'axiomatique de la physique quantique classique (qui traite de plusieurs particules en utilisant la notion de produit tensoriel) et les procédés de calculs liés à notre théorie. Ceci apparaîtra clairement dans la sous-section suivante.

### 2.20.2 L'intrication quantique décrite par notre théorie

Pour la clarté de l'exposé qui va suivre, nous commençons par préciser, sous forme de définitions, les notions que nous allons utiliser.

*Définition 54. Une métrique oscillante double est une métrique oscillante d'ordre 2 dans un potentiel électromagnétique, de métrique  $g = |a|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}}$ , elle est définie sur le domaine déterminé par le « double appareil de Stern-Gerlach » décrit par la figure 2.2. Sur le domaine pour lequel  $y \in y_{1D}, y_{3D}$  (resp.  $y \in y_{1G}, y_{3G}$ ) la métrique est notée  $g_D = |a_D|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}_D}$  (resp.  $g_G = |a_G|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}_G}$ ). Le domaine pour lequel  $y \in y_{1D}, y_{2D}$  (resp.  $y \in y_{1G}, y_{2G}$ ) est celui d'un faisceau de métrique oscillante dans un potentiel neutre de spin 1/2 d'axe  $\vec{y}$  de vitesse  $\vec{v}$  de même sens que  $\vec{y}$  (resp.  $-\vec{y}$ ).*

Les notions introduites dans les définitions suivantes sont essentielles dans la description du phénomène d'« intrication quantique ». Nous n'utiliserons qu'un cas particulier de la définition (55) qui va suivre, celle-ci sera utile pour une étude plus générale des phénomènes d'intrication. Le cas particulier que nous allons utiliser ici sera présenté dans la définition (56).

On considère une métrique oscillante élémentaire d'ordre 2 dans un potentiel électromagnétique  $g = |a|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}}$ , ainsi qu'un isomorphisme  $\sigma$  de l'espace  $E_{\lambda, \gamma} := E_{S^1}(\delta) \otimes E_{S^3}(\gamma)$ . Cet espace sera considéré comme espace vectoriel réel de dimension 8 pour lequel on prendra comme base  $(v_{ij})$   $i \in \{1, 2\}$   $j \in \{1, 2, 3, 4\}$  où  $v_{1j}(u, s) := (\cos u)\alpha_j(s)$ ,  $v_{2j}(u, s) := (\sin u)\alpha_j(s)$ .

(Ici  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$  est la base de  $E_{S^3}(\gamma)$  définie en 2.15.7 exemple 1).

La fonction  $a$  est de la forme  $\phi\beta$  (def. 27) où  $\phi : \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  s'écrit :

$$\forall x \in \Theta, \quad \phi_x(\cdot) = \sum_{i,j} \phi^{ij}(x) v_{ij}(\cdot).$$

Notons  $\phi_\sigma : \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par :

$$\forall x \in \Theta, \quad \phi_{\sigma x}(\cdot) = \sum_{i,j} \phi^{ij}(x) \sigma(v_{ij})(\cdot) \quad \text{et} \quad a_\sigma := \phi_\sigma \beta$$

**Définition 55.** La  $\sigma$ -transformée de la métrique  $g = |a|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}}$  est la métrique  $g_\sigma = |a_\sigma|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}}$ .

Bien entendu,  $g_\sigma$  est encore une métrique élémentaire d'ordre 2 avec spin 1/2.

Nous nous limitons maintenant au cas particulier d'une métrique oscillante homogène d'ordre 2 avec spin 1/2 qui sera, dans la suite, la restriction au domaine pour lequel  $y \in )y_{1D}, y_{2D}($  (resp.  $y \in )y_{1G}, y_{2G}($ ) d'une métrique oscillante double (def. 54). Nous ne considérons que le cas où l'état de spin  $\zeta_D \in E_1^{\mathbb{C}}$  (resp.  $\zeta_G$ ) est un vecteur propre d'un endomorphisme  $\vec{S}_{\theta_D}$  (resp.  $\vec{S}_{\theta_G}$ ) défini par l'égalité (2.81).

Soit  $\theta_T \in ]-\pi, +\pi[$  et  $g = |a|^{\frac{4}{n-2}} g_0$  une métrique oscillante homogène d'ordre 2 avec spin 1/2 dont l'état de spin est de la forme  $\zeta_{\theta,k} = e^{ik}((\cos \theta/2)\beta_1 + (\sin \theta/2)\beta_2)$ .

**Définition 56.** La  $\theta_T$ -transformée de la métrique oscillante  $g$ , notée  $g_{\theta_T}$ , est la  $\sigma$ -transformée de  $g$  (def. 55) pour laquelle l'état de spin est :  $\zeta_{\theta-\theta_T,k} = e^{ik}((\cos \frac{\theta-\theta_T}{2})\beta_1 - (\sin \frac{\theta-\theta_T}{2})\beta_2)$ .

**Les  $\theta_T$ -transformations sont donc celles qui provoquent une rotation d'angle  $\theta_T/2$  de l'état de spin** (Le lecteur pourra expliciter les isomorphismes  $\sigma$  (en fait, des rotations) de  $E_{S^1}(\lambda) \otimes E_{S^3}(\gamma)$  qui correspondent à ces  $\theta_T$ -transformations).

La dernière notion que l'on introduit est celle de « métriques oscillantes successives », elle traduit en terme de métrique oscillante ce qu'en langage de physique classique on appellerait « flots de particules successifs », les particules pouvant être de nature différente suivant les intervalles de temps considérés.

On considère donc un intervalle de temps  $]t_1, t_m[$  décomposé en intervalles successifs  $I_1, I_2 \dots I_m$  où  $I_k := ]t_k, t_{k+1}[$ .

Un domaine de la forme  $\mathcal{C} = ]t_1, t_m[ \times \Omega \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$  se décompose comme réunion disjointe des sous-domaines :  $\mathcal{C}_k := I_k \times \Omega \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$ .

On donne la définition suivante :

**Définition 57.** Un domaine de type « métriques oscillantes successives » est un domaine  $(\mathcal{C}, g)$  où  $\mathcal{C} = \cup_{k=1}^m \mathcal{C}_k$  est présenté dans les lignes précédentes. Pour les indices pairs ( $k = 2l$ ) (par exemple), la métrique  $g|_{\mathcal{C}_k}$  est celle d'une métrique oscillante qui s'écrit  $|a_k|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}}$ . Pour

les indices impairs ( $k = 2l + 1$ ) la métrique  $g|_{\mathcal{C}_k}$  est de la forme  $c_k g_P$  où  $c_k$  est une constante positive ou nulle.

Cette notion de « métriques oscillantes successives » est, bien sûr, idéalisée. Dans la suite les constantes  $c_k$  pourront être considérées  $\ll 1$  (lorsque  $c_k = 0$  la métrique est dégénérée).

### Analyse de l'expérience de type A,G,R [1] en terme de métriques oscillantes

L'appareil considéré est le double appareil de Stern-Gerlach décrit par la figure 2.2. Nous faisons référence à l'expérience [1], bien qu'ici ce soit la mesure de spin qui intervienne et non la mesure de polarité de photons, ceci car nous n'avons pas développé, dans ce papier, cette dernière notion, propre, pour nous, aux métriques oscillantes à masse nulle (cf.2.16).

En physique quantique standard, l'état de polarisation de la paire de photons émise par une « cascade atomique » d'atomes de calcium dans le domaine où  $y \in ]y_{1G}, y_{1D}[$  (est supposé être l'état intriqué suivant (cf.figure 2.2) :

$$\frac{1}{2}(\xi \otimes \xi + \xi^\perp \otimes \xi^\perp) \quad (2.97)$$

Nous étudierons ici le cas plus général pour lequel l'état de polarisation (ou de spin) est de la forme :

$$\frac{1}{2}(\xi_1 \otimes \xi_2 + \xi_1^\perp \otimes \xi_2^\perp) \quad (2.98)$$

**En terme de métrique oscillante d'ordre 2 avec spin 1/2, ceci est remplacé par la donnée présentée dans le paragraphe qui suit.**

**Les métriques oscillantes doubles successives (def.54 et def.57) créées dans le domaine où  $y \in ]y_{1G}, y_{1D}[$**

Ces métriques oscillantes seront définies par la succession de métriques oscillantes doubles qui pourront être de deux types différents, ces types étant équiprobablement répartis sur les intervalles de temps concernés. Nous commençons par donner les précisions suivantes :

L'intervalle de temps total de l'expérience  $I = ]t_1, t_m[$  (est décomposé sous la forme  $I = \cup_{k=1}^{m-1} I_m$ . On note  $\mathcal{C}_{y_i, y_j}$  le sous-domaine de  $\mathcal{C} = I \times \omega \times S^1 \times S^3 \times V$  pour lequel  $y \in ]y_i, y_j[$ .

Les métriques oscillantes doubles sont construites à partir des quatre fonctions  $a_1^G, a_2^G, a_1^D, a_2^D$  suivantes ( $G$  et  $D$  font référence à la partie gauche et droite de l'appareil décrit par la figure 2.2) :

1.  $a_1^G : \mathcal{C}_{y_{4G}, y_{1G}} \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que  $g_1^G := |a_1^G|^{\frac{4}{n-2}} g_P$  soit une métrique oscillante élémentaire d'ordre 2 avec spin 1/2, sa restriction à  $\mathcal{C}_{y_{2G}, y_{1G}}$  est un faisceau de métrique oscillante (def. 48) dont l'état de spin a pour angle  $\theta_1^G$  et est noté  $\gamma_{\theta_1^G}$  (def. 52), sa vitesse  $\vec{v}_1^G$  a un sens opposé à  $\vec{y}$ .
2.  $a_1^D : \mathcal{C}_{y_{1D}, y_{4D}} \rightarrow \mathbb{R}$  a les mêmes propriétés que  $a_1^G$ , l'état de spin de la restriction de  $g_1^D$  à  $\mathcal{C}_{y_{1D}, y_{2D}}$  est noté  $\gamma_{\theta_1^D}$ , sa vitesse est  $\vec{v}_1^D = -\vec{v}_1^G$  (on suppose que  $|\vec{v}_1^G| = |\vec{v}_1^D|$  dans le seul but de simplifier les conditions sur les dimensions de l'appareil en vue de la simultanéité des mesures en  $G$  et  $D$ ).

3.  $a_2^G : \mathcal{C}_{y_{4G}, y_{1G}} \rightarrow \mathbb{R}$  a les mêmes propriétés que  $a_1^G$  mais l'état de spin  $\gamma_{\theta_2^G}$  de la restriction de  $g_2^G$  à  $\mathcal{C}_{y_{2G}, y_{1G}}$  est l'orthogonal canonique  $\gamma_{\theta_1^G}^\perp$  de  $\gamma_{\theta_1^G}$  (def. 53).
4.  $a_2^D : \mathcal{C}_{y_{1D}, y_{4D}} \rightarrow \mathbb{R}$  a les mêmes propriétés que  $a_1^D$  mais l'état de spin  $\gamma_{\theta_2^D}$  de la restriction de  $g_2^D$  à  $\mathcal{C}_{y_{1D}, y_{2D}}$  est l'orthogonal canonique  $\gamma_{\theta_2^D}^\perp$  de  $\gamma_{\theta_2^D}$ .

Bien que les notions soient fondamentalement différentes, le lecteur pourra faire le parallèle entre les conditions que l'on vient de poser sur les états de spin des métriques associées aux quatre fonctions précédentes et l'état de polarisation (2.98) donné en physique quantique classique.

Les métriques oscillantes effectives qui vont permettre d'obtenir des résultats identiques à ceux de la physique quantique classique sont précisées dans les lignes qui suivent.

On note  $\mathcal{C}_{y_i, y_j}^k$  le sous domaine de  $\mathcal{C}_{y_i, y_j}$  pour lequel  $t \in I_k$ .

Pour un indice  $k = 2l + 1$ , la métrique sur  $\mathcal{C}$  est de la forme  $g = c_k g_{\mathcal{P}}$  où  $c_k$  est une constante positive ou nulle.

Pour un indice  $k = 2l$  la métrique est une métrique oscillante double (def. 54), c'est **équiprobablement** l'une des deux métriques suivantes :

1.  $g_{\theta_{T_1}}$  : la  $\theta_{T_1}$ -transformée (def.56) de la métrique  $g = |a_1|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}}$  où la fonction  $a_1$  restreinte à  $\mathcal{C}_{y_{4G}, y_{1G}}^{2l}$  est  $a_1^G$  et restreinte à  $\mathcal{C}_{y_{1D}, y_{4D}}^{2l}$  est  $a_1^D$ .
2.  $g_{\theta_{T_2}}$  : la  $\theta_{T_2}$ -transformée de la métrique  $g = |a_2|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}}$  où la fonction  $a_2$  restreinte à  $\mathcal{C}_{y_{4G}, y_{1G}}^{2l}$  est  $a_2^G$  et restreinte à  $\mathcal{C}_{y_{1D}, y_{4D}}^{2l}$  est  $a_2^D$ .

Voici quelques exemples pour les choix de  $\theta_{T_1}$  et  $\theta_{T_2}$  qui donnent les résultats (identiques à ceux de la mécanique quantique standard) énoncés dans la proposition 14 qui suivra. Un commentaire sur ces choix est donné après la présentation des exemples.

On note  $\theta^G$  l'angle de mesure de l'appareil de Stern-Gerlach situé à gauche et  $\theta^D$  celui de l'appareil situé à droite (Figure 2.2).

**Exemple 1 :**  $\theta_{T_1} = \theta^G - \theta_1^G$  et  $\theta_{T_2} = \theta^G - \theta_2^G$ .

(Ici la partie gauche de l'appareil est privilégiée mais on peut symétriquement privilégier la partie droite en posant  $\theta_{T_1} = \theta^D - \theta_1^D$  et  $\theta_{T_2} = \theta^D - \theta_2^D$ ).

La dissymétrie gauche-droite de l'exemple 1 peut sembler injustifiée mais on remarquera que, dans l'expérience (A,G,P [1]), une dissymétrie est imposée puisque l'on sélectionne par leurs fréquences les photons partant vers la gauche et ceux partant vers la droite.

L'exemple qui suit a une symétrie gauche-droite.

**Exemple 2 :** Il y a équiprobabilité entre les quatre possibilités suivantes :

$$\theta_{T_1} = \theta^G - \theta_1^G, \quad \theta_{T_1} = \theta^D - \theta_1^D, \quad \theta_{T_2} = \theta^G - \theta_2^G, \quad \theta_{T_2} = \theta^D - \theta_2^D.$$

Mais on peut concevoir d'autres exemples comme celui pour lequel :

$$|\theta_{T_1}| = \min(|\theta^G - \theta_1^G|, |\theta^D - \theta_1^D|) \quad \text{et} \quad |\theta_{T_2}| = \min(|\theta^G - \theta_2^G|, |\theta^D - \theta_2^D|).$$

En fait, un choix de  $\theta_{T_1}$  et  $\theta_{T_2}$  ne pourra être précisé que par une étude du phénomène de « création » des métriques oscillantes doubles (étude de la cascade atomique d'atomes de calcium par exemple), mais ce papier n'aborde pas encore ce sujet complexe. D'autre part, il est

possible que les hypothèses que l'on a posées pour caractériser les métriques oscillantes doubles successives soient notablement modifiées par la suite. L'intérêt de cette section est principalement de montrer que les phénomènes d'« intrication » étudiés par la mécanique quantique classique peuvent être décrits qualitativement et quantitativement dans le cadre de notre théorie.

(On peut résumer brièvement le processus en disant que, systématiquement, une « rotation » dans  $S^1(\delta) \times S^3(\rho)$  de la métrique oscillante double  $g = |a_1|^{\frac{4}{n-2}} g_{\mathcal{P}}$  fait coïncider : soit l'angle de l'état de spin lié à  $a_1^G$  avec l'angle de mesure  $\theta_G$ , soit l'angle de l'état de spin lié à  $a_1^D$  avec l'angle de mesure  $\theta_D$ ).

Il peut paraître surprenant, au premier abord, que les choix de  $\theta_{T_1}$  et  $\theta_{T_2}$  donnés dans les exemples précédents et qui permettent d'obtenir les résultats de la proposition 14, dépendent des angles de mesure  $\theta^G$  et  $\theta^D$  définis à partir des champs magnétiques  $\vec{B}_G$  et  $\vec{B}_D$ . Ces champs sont, en effet, situés à une  $g_0|_{\Theta}$ -distance du domaine de « création » des métriques oscillantes qui peut être importante.

**Cependant, il ne faut pas oublier que toutes les notions introduites sur le spin (ou éventuellement la polarité) ne concernent que la variété compacte  $S^1(\delta) \times S^3(\rho)$  et que celle-ci apparaît dans le produit cartésien avec l'espace apparent  $\Theta$  (les objets liés à la notion de spin ne sont pas « inclus » dans l'espace apparent). Ceci change profondément des habitudes acquises en physique classique pour laquelle une procédure similaire n'est pas adaptable. D'autre part, on pourra remarquer que, pendant les intervalles de temps  $I_{2l+1}$  (immédiatement avant la création d'une métrique oscillante double) la métrique  $g$  est de la forme  $c g_{\mathcal{P}}$  et, si la constante  $c$  est  $\ll 1$ , la distance effective, qui est la  $g|_{\Theta}$ -distance, peut être aussi petite qu'on le souhaite relativement à la  $g_0|_{\Theta}$ -distance, cette dernière étant celle mesurée par un observateur extérieur au domaine de l'expérience .**

« Le lien fantôme », dont parlait ironiquement A.Einstein au sujet de deux particules intriquées, a comme support, dans le cadre de notre théorie, la variété compacte  $S^1(\delta) \times S^3(\rho)$ .

Le résultat important de cette section est le suivant :

*Proposition 14. On considère l'appareil décrit par la figure 2.2.*

*On note  $\theta^G$  (resp.  $\theta^D$ ) l'angle de mesure (def.51) de l'appareil de Stern-Gerlach situé à gauche (resp. à droite).*

*Les métriques oscillantes doubles sont celles décrites dans le chapitre précédent et on se place dans le cadre d'un des exemples que l'on vient de présenter.*

*On note  $\omega_{1G}$  et  $\omega_{2G}$  (resp.  $\omega_{1D}$  et  $\omega_{2D}$ ) les deux domaines de  $\mathbb{R}^3$  présentés dans les propositions 12 et 13 pour l'appareil de Stern-Gerlach situé à gauche (resp. à droite).*

*On suppose qu'à un instant  $t \in ]t_1, t_2[$ , un couple de singularités élémentaires  $(\varsigma_G, \varsigma_D)$  est tel que  $\varsigma_G \in \omega_{1G} \cup \omega_{2G}$  et  $\varsigma_D \in \omega_{1D} \cup \omega_{2D}$ .*

*On note  $(+, +)$  la situation pour laquelle  $\varsigma_G \in \omega_{1G}$  et  $\varsigma_D \in \omega_{1D}$ ,  $(+, -)$  celle pour laquelle  $\varsigma_G \in \omega_{1G}$  et  $\varsigma_D \in \omega_{2D}$ , de même pour  $(-, +)$  et  $(-, -)$ .*

*Alors :*

1. Les probabilités d'obtenir  $(+, +)$ ,  $(+, -)$ ,  $(-, +)$ ,  $(-, -)$  sont les suivantes :

$$p(+, +) = p(-, -) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{(\theta^G - \theta^D) - (\theta_1^G - \theta_1^D)}{2} \quad (2.99)$$

$$p(+, -) = p(-, +) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{(\theta^G - \theta^D) - (\theta_1^G - \theta_1^D)}{2} \quad (2.100)$$

où  $\theta_1^G$  (resp.  $\theta_1^D$ ) est l'angle de l'état de spin de la métrique  $g_1^G$  (resp.  $g_1^D$ ) définie dans le chapitre précédent.

Ces probabilités peuvent aussi s'écrire comme suit :

$$p(+, +) = p(-, -) = \frac{1}{2} |\langle \gamma_{\theta^G}, \gamma_{\theta_1^G} \rangle \langle \gamma_{\theta^D}, \gamma_{\theta_1^D} \rangle + \langle \gamma_{\theta^G}, \gamma_{\theta_1^G}^\perp \rangle \langle \gamma_{\theta^D}, \gamma_{\theta_1^D}^\perp \rangle|^2 \quad (2.101)$$

$$p(+, -) = p(-, +) = \frac{1}{2} |\langle \gamma_{\theta^G}, \gamma_{\theta_1^G} \rangle \langle \gamma_{\theta^D}, \gamma_{\theta_1^D}^\perp \rangle + \langle \gamma_{\theta^G}, \gamma_{\theta_1^G}^\perp \rangle \langle \gamma_{\theta^D}, \gamma_{\theta_1^D} \rangle|^2 \quad (2.102)$$

où  $\gamma_{\theta^G}$  (resp.  $\gamma_{\theta^D}$ ) est le vecteur propre de  $\hat{S}_{\theta^G}$  (resp.  $\hat{S}_{\theta^D}$ ) défini par (2.81),  $\gamma_{\theta_1^G}$  (resp.  $\gamma_{\theta_1^D}$ ) est l'état de spin de la métrique  $g_1^G$  (resp.  $g_1^D$ ),  $\gamma_{\theta_1^G}^\perp = \gamma_{\theta_2^G}$  (resp.  $\gamma_{\theta_1^D}^\perp = \gamma_{\theta_2^D}$ ) est l'orthogonal canonique de  $\gamma_{\theta_1^G}$  (resp.  $\gamma_{\theta_1^D}$ ) (def.53).

2. Si l'on note  $(+)_G$  (resp.  $(+)_D$ ) la situation pour laquelle  $\zeta_G \in \omega_{1G}$  (resp.  $\zeta_D \in \omega_{1D}$ ) et  $(-)_G$  (resp.  $(-)_D$ ) celle pour laquelle  $\zeta_G \in \omega_{2G}$  (resp.  $\zeta_D \in \omega_{2D}$ ), alors : les probabilités d'obtenir les situations  $(+)_G$  et  $(-)_G$  (indépendamment des situations  $(+)_D$  et  $(-)_D$ ) sont égales à  $\frac{1}{2}$ . De même pour celles d'obtenir les situations  $(+)_D$  et  $(-)_D$ .

On a ici obtenu des résultats identiques à ceux qu'obtient la mécanique quantique classique en partant de l'état « intriqué » donné par (2.98).

Dans le cas particulier qui correspond à l'expérience du type A,G,R [1], l'état de spin de la paire de particules est donnée, en mécanique quantique classique, par (2.97). Pour nous, cette hypothèse se traduit, dans la proposition 14, par le fait que  $\theta_1^G = \theta_1^D$ .

Il s'en suit que :

$$p(+, +) = p(-, -) = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{(\theta^G - \theta^D)}{2} \quad \text{et} \quad p(+, -) = p(-, +) = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{(\theta^G - \theta^D)}{2}.$$

La fonction de corrélation  $E_{\theta^G, \theta^D} := p(+, +) + p(-, -) - p(+, -) - p(-, +)$  vérifie donc :

$$E_{\theta^G, \theta^D} = \cos^2 \frac{(\theta^G - \theta^D)}{2} - \sin^2 \frac{(\theta^G - \theta^D)}{2} = \cos(\theta^G - \theta^D).$$

Si l'on choisit comme angles de mesure :

$(\theta^G = 0 \text{ ou } \theta'^G = \pi/2), \quad (\theta^D = \pi/4 \text{ ou } \theta'^D = -\pi/4)$ , les quatre mesures donnent :

$$E_{0, \pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad E_{0, -\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad E_{\pi/2, \pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad E_{\pi/2, -\pi/4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

La quantité  $S := E_{0, \pi/4} + E_{0, -\pi/4} + E_{\pi/2, \pi/4} - E_{\pi/2, -\pi/4}$  vaut alors  $2\sqrt{2}$  ce qui contredit l'inégalité de Bell et correspond au résultat expérimental [1]. Ceci montre que la théorie présentée

ici ne s'apparente pas à une théorie à variables cachées locale.

#### Démonstration de la proposition 14

On considère l'exemple 1, les autres exemples se traitent de la même manière.

1. On suppose qu'au temps  $t \in I_{2l}$  de la mesure, la métrique oscillante double est  $g_{\theta_{T_1}}$ .

La proposition 13 montre que la probabilité pour que  $\varsigma_G$  soit vue dans  $\omega_{1G}$  est :

$$\cos^2 \frac{(\theta^G - \theta_1^G) - (\theta^G - \theta_1^G)}{2} = 1 \text{ et la probabilité qu'elle soit vue dans } \omega_{2G} \text{ est nulle.}$$

la probabilité pour que  $\varsigma_G$  soit vue dans  $\omega_{1D}$  est :  $\cos^2 \frac{(\theta^G - \theta_1^G) - (\theta^D - \theta_1^D)}{2}$  et la probabilité

qu'elle soit vue dans  $\omega_{2D}$  est :  $\sin^2 \frac{(\theta^G - \theta_1^G) - (\theta^D - \theta_1^D)}{2}$ . La probabilité d'obtenir la situation

$(+, +)$  est donc :  $\cos^2 \frac{(\theta^D - \theta_1^D) - (\theta^G - \theta_1^G)}{2}$ , celle d'obtenir  $(+, -)$  est :  $\sin^2 \frac{(\theta^D - \theta_1^D) - (\theta^G - \theta_1^G)}{2}$ , les probabilités d'obtenir  $(-, +)$  et  $(-, -)$  sont nulles.

2. On suppose qu'au temps  $t \in I_{2l}$  de la mesure, la métrique oscillante double est  $g_{\theta_{T_2}}$ .

La proposition 13 montre ici que la probabilité pour que  $\varsigma_G$  soit vue dans  $\omega_{1G}$  est :

$$\cos^2 \frac{(\theta^G - \theta_1^G) - (\theta^G - \theta_2^G)}{2} = 0 \text{ puisque } \theta_2^G \text{ est l'angle de l'orthogonal canonique } \gamma_{\theta_1^G}^\perp \text{ et vérifie}$$

donc d'après (2.91) :  $\theta_2^G = \theta_1^G - \pi$ . La probabilité pour que  $\varsigma_G$  soit vue dans  $\omega_{2G}$  est alors égale à 1.

La probabilité pour que  $\varsigma_D$  soit vue dans  $\omega_{1D}$  est :

$$\cos^2 \frac{(\theta^D - \theta_1^D) - (\theta^G - \theta_2^G)}{2} = \sin^2 \frac{(\theta^D - \theta_1^D) - (\theta^G - \theta_1^G)}{2} \text{ et la probabilité pour qu'elle soit vue dans } \omega_{2D} \text{ est : } \cos^2 \frac{(\theta^D - \theta_1^D) - (\theta^G - \theta_1^G)}{2}.$$

Les probabilités d'obtenir les situations  $(+, +)$  et  $(+, -)$  sont donc nulles, la probabilité d'obtenir  $(-, +)$  est :  $\sin^2 \frac{(\theta^D - \theta_1^D) - (\theta^G - \theta_1^G)}{2}$ , celle d'obtenir  $(-, -)$  est :  $\cos^2 \frac{(\theta^D - \theta_1^D) - (\theta^G - \theta_1^G)}{2}$ .

Puisque, par hypothèse, les situations présentées sont les seules possibles et sont équiprobables, on en déduit que les égalités (2.99) et (2.100) sont vérifiées.

Les égalités (2.101) et (2.102) se démontrent rapidement puisque :

$$\gamma_{\theta^G} = ((\cos \frac{\theta}{2})\beta_1 - (\sin \frac{\theta}{2})\beta_2)e^{ik_G} \quad \gamma_{\theta^G}^\perp = ((\sin \frac{\theta}{2})\beta_1 + (\cos \frac{\theta}{2})\beta_2)e^{ik_G}$$

$$\gamma_{\theta_1^G} = ((\cos \frac{\theta_1}{2})\beta_1 - (\sin \frac{\theta_1}{2})\beta_2)e^{ik_{G_1}} \quad \gamma_{\theta_1^G}^\perp = ((\sin \frac{\theta_1}{2})\beta_1 + (\cos \frac{\theta_1}{2})\beta_2)e^{ik_{G_1}}$$

où  $k_G$  et  $k_{G_1}$  sont des réels.

De même pour  $\gamma_{\theta^D}$ ,  $\gamma_{\theta^D}^\perp$ ,  $\gamma_{\theta_1^D}$ ,  $\gamma_{\theta_1^D}^\perp$ .

La partie 2. de la proposition 14 est une conséquence rapide de la symétrie des données.

## 2.21 Quelques remarques sur la description à venir de phénomènes plus complexes

Dans le deuxième chapitre de ce papier nous nous sommes limités à l'étude des phénomènes physiques qui interviennent dans les expériences génériques de la mécanique quantique standard (diffraction, fentes de Young, déviations par un potentiel, expérience de Stern-Gerlach, intrication quantique, etc.). Avec le regard que l'on porte ici sur la physique nous n'avons considéré

que les domaines de type « métrique oscillante dans un potentiel » (en restant dans le cadre de l'approximation linéaire (cf.section 2.4) et les singularités élémentaires (cf.section 2.13) n'ont eues qu'un rôle secondaire en n'intervenant que lors de « mesures » (mesures de position ou autre (cf.section 2.18)). Les phénomènes plus complexes auxquels nous souhaitons nous intéresser maintenant sont ceux qui, dans le langage de la physique standard, font intervenir les « interactions » des particules entre elles.

Les deux faits suivants vont être remis en cause :

1. Le fait d'avoir utilisé l'approximation linéaire et donc l'équation 2.3 (alors que l'équation qui tient compte d'une forme d'interaction entre les particules est l'équation non linéaire 2.2)
2. Le fait d'avoir considéré que les singularités n'ont qu'une influence négligeable sur les métriques oscillantes.

Nous allons présenter très succinctement dans ce qui suit quelques éléments d'étude dans lesquels les deux faits précédents ne sont plus nécessairement considérés, ceci en décrivant des exemples très particuliers dans le seul but de montrer les difficultés auxquelles nous allons être confrontés.

### 2.21.1 Où l'on abandonne l'approximation linéaire mais on continue à négliger l'influence éventuelle des singularités sur les équations qui régissent les métriques conformes à un potentiel

On décrit une expérience qui, dans le langage de la physique standard correspond à l'envoi de deux flots de particules lancées à des vitesses opposées de module  $\lambda$  et qui se rencontrent à l'instant  $t = 0$  sur la surface d'équation  $x^1 = 0$ .

Pour cela on considère deux domaines de  $\mathbb{R}^4$  notés  $\Theta_1$  et  $\Theta_2$  définis par :

$$\begin{aligned}\Theta_1 &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^4 \mid t < t_0 < 0, \quad x^1 < \lambda t < 0, \quad (x^1, x^2) \in \omega \subset \mathbb{R}^2\} \\ \Theta_2 &= \{(t, x) \in \mathbb{R}^4 \mid t < t_0 < 0, \quad x^1 > -\lambda t > 0, \quad (x^1, x^2) \in \omega \subset \mathbb{R}^2\}\end{aligned}$$

On suppose que le domaine  $\mathcal{C}_1 := \Theta_1 \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$  est un domaine de type métrique à courbure scalaire constante conforme à  $g_0$  (def.19) dont la métrique  $g_1 = |a_1|^{4/n-2} g_0$  est telle que la décomposition spectrale de la fonction  $a_1$  est de la forme (cf.sous-section 2.5.1) :

$$a_1(x, \cdot) = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i(x) \alpha_i(\cdot)$$

où  $(\alpha_i)$  est une base hilbertienne orthonormée de fonctions propres de  $(S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V, g_0)$ .

On suppose que cette décomposition spectrale a un terme principal qui représente une métrique oscillante élémentaire **homogène** se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  suivant l'axe des  $x^1$  et de module  $|\vec{v}| = \lambda$ , les autres termes de la décomposition spectrale (les « harmoniques ») étant négligeables relativement au terme principal (il est à noter qu'une fonction  $a_1$  correspondant à une métrique oscillante élémentaire homogène ne peut pas vérifier l'équation non-linéaire 2.2 puisque une solution d'une telle équation contient nécessairement une infinité de termes non nuls dans la décomposition).



On suppose que le domaine  $\mathcal{C}_2 := \Theta_2 \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$  vérifie les mêmes propriétés avec  $g_2 = |a_2|^{4/n-2}g_0$ , la vitesse correspondant au terme principal étant égale à  $-\vec{v}$  (on ne suppose pas nécessairement que le terme principal représente une métrique oscillante du même type que celle définie sur  $\mathcal{C}_1$ ). La vitesse  $\vec{v}$  est choisie de sorte que la « rencontre » des deux métriques oscillantes ait lieu pour  $t = 0$ . La métrique est supposée proche de  $g_0$  sur le domaine  $\mathcal{C}_{t_0} - (\mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2)$  où  $\mathcal{C}_{t_0} := \{t < t_0\} \times \mathbb{R}^3 \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$ .

Il s'agit alors de déterminer la fonction  $a$  (ou du moins d'avoir des informations sur celle-ci) définie sur  $\mathcal{C} = \mathbb{R}^4 \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$ , correspondant à une métrique à courbure scalaire constante telle que  $g = |a|^{4/n-2}g_0$  (c'est à dire qui vérifie l'équation 2.2 avec  $g_{\mathcal{P}} = g_0$ ) celle-ci étant égale à la fonction que l'on a précisée sur  $\mathcal{C}_{t_0}$ . Ce dernier point est la « condition aux limites » imposée à la solution de l'équation 2.2.

La difficulté technique de cette étude est considérable et on se limitera sans doute à évaluer les termes principaux de la décomposition spectrale de la fonction  $a$ . Ces termes pourront représenter des métriques oscillantes de types différents de ceux intervenant dans la condition aux limites pour  $t < t_0$ . Il est concevable qu'apparaissent des termes représentant des métriques oscillantes « à durée de vie limitée » que l'on présentera plus loin dans cette section.

### 2.21.2 Les singularités et leurs influences

Jusqu'à présent nous n'avons pas donné d'expressions précises de métriques au voisinage de singularités (cf. section 2.13) car ceci n'était pas nécessaire dans le cadre des phénomènes que nous avons étudiés. Le comportement des métriques au voisinage des singularités va devenir un ingrédient important dans la description précise des notions qui, dans le langage de la physique standard, concernent les « particules composées », « les noyaux d'atomes », « les atomes », etc. Bien entendu, pour nous, ces notions resteront dans le cadre de la théorie déjà présentée en terme de « déformation de l'espace-temps de dimension  $n$  » et plus précisément, dans l'étude de domaines particuliers de type « métrique à courbure scalaire constante conforme à un potentiel », mais des résultats précis ne pourront être obtenus qu'avec une description suffisamment détaillée du comportement asymptotique de la métrique au voisinage d'une singularité.

Des exemples de comportements asymptotiques respectant les critères géométriques imposés ont été présentés dans le manuscrit [5], ceci pour des singularités de « dimensions » (relatives aux sous-variétés correspondantes) différentes. Nous nous restreindrons ici à la présentation de quelques exemples « naïfs » dans le seul but d'initier une étude plus approfondie.

La cellule type considérée est de la forme  $\mathcal{C} = I \times \Omega \times W$  où  $W = S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$ . On note  $(t, x^1, x^2, x^3)$  les coordonnées de  $I \times \Omega$ , on suppose que  $0 \in \Omega$  et on pose  $r = (\sum_{k=1}^3 (x^k)^2)^{1/2}$ .

#### Exemple 1

Considérons une métrique à courbure scalaire constante conforme à un potentiel neutre  $g = |a|^{4/n-2}g_0$  où la fonction  $a$  est de la forme suivante :

$$a = \frac{c}{r}a_1 + a_2 \quad (2.103)$$

où  $c$  est une constante.

On suppose que les métriques  $|a_1|^{4/n-2}g_0$  et  $|a_2|^{4/n-2}g_0$  sont celles de métriques oscillantes élémentaires (def. 21) et vérifient donc  $\square_{g_0}a_i + Sa_i = 0$ . Lorsque la fonction  $a_1$  ne dépend pas des variables  $(x^1, x^2, x^3)$  on en déduit, puisque  $\square_{g_0}(\frac{1}{r}) = \Delta(\frac{1}{r}) = 0$ , que  $\square_{g_0}a + Sa = 0$  sur  $\mathcal{C} - \mathcal{S}$  où  $\mathcal{S} = I \times \{0\} \times W$ .

Pour  $(t, u) \in I \times S^1(\delta)$  la singularité  $\mathcal{S}(t, u)$  est donc de la forme  $\mathcal{S}(t, u) = \{t\} \times \{0\} \times \{u\} \times S^3(\rho) \times V$ .

La fonction  $a$  est donc ici celle d'une métrique oscillante avec une singularité (stationnaire en  $0 \in \Omega$ ).

On suppose que les fonctions  $a_1$  et  $a_2$  sont du même ordre de grandeur. Comme exemple, et pour faire le lien avec la physique standard, on suppose que la métrique oscillante  $g := |a|^{4/n-2}g_0$  est celle associée à un proton (stationnaire). En dehors d'un domaine très proche de la singularité on a  $a \simeq a_2$ . La fonction  $a_2$  est donc celle qui caractérise la métrique oscillante « proton ». Lorsque l'on « néglige » la singularité, c'est la fonction  $a_2$  qui porte, comme on l'a vu, les caractéristiques importantes : masse, charge électrique, spin, etc. et que l'on utilise dans la description des expériences standard (diffraction, etc.). La métrique  $g_1 := |\frac{c}{r}a_1|^{4/n-2}g_0$  ne devient prépondérante que lorsque  $\frac{c}{r} > 1$ , de sorte que la fonction  $a_2$  devient négligeable devant  $\frac{c}{r}a_1$ . la fonction  $a_1$  peut donc être considérée comme celle qui décrit la **constitution interne du proton**. La décomposition spectrale de la fonction  $a_1$  peut éventuellement faire intervenir dans ses termes prépondérants la notion de « quark » et il est probable que des grandeurs caractéristiques importantes proviennent de la variété compacte  $V$  dans la décomposition de  $W$  sous la forme  $S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$  (il se peut que le groupe  $SU(3)$  soit naturellement associé à  $V$  comme  $SU(1)$  était associé à  $S^1(\delta)$  (difféomorphe) et  $SU(2)$  à  $S^3(\rho)$ ). Il est à noter que la métrique  $g_1$  s'écrit sous la forme  $g_1 := |ca_1|^{4/n-2}g'_0$  où  $g'_0 := \frac{1}{r^{4/n-2}}g_0$  et que  $g'_0$  est une métrique « inversée » par rapport à  $g_0$  (lorsque  $n = 6$ , la métrique  $g'_0 = \frac{1}{r}g_0$  est, sur  $\mathbb{R}^{3*}$ , celle qui correspond à l'inversion  $\varphi : \mathbb{R}^{3*} \rightarrow \mathbb{R}^{3*}$  définie par  $\varphi(x) = \frac{x}{r^2}$  où  $x = (x^1, x^2, x^3)$  et l'on a  $\varphi^*g_0 = g'_0$ ).

Nous avons, sur cet exemple, utilisé l'approximation linéaire puisque les fonctions considérées sont solutions de l'équation 2.3. Lorsque les fonctions  $a_1$  et  $a_2$  sont  $\ll 1$  et  $\frac{c}{r}$  est  $< 1$  ceci peut être considéré comme une bonne approximation du cas général qui utilise l'équation 2.2, cependant, ce n'est plus le cas lorsque  $\frac{c}{r} \gg 1$ , c'est à dire dans la description de la constitution interne du proton.

*Remarque 34.* On peut éventuellement considérer que le terme  $\frac{c}{r}a_1$  dans l'expression de la fonction  $a$  qui décrit la singularité provient d'un « effondrement » d'une métrique oscillante caractérisée par la fonction  $a_2$ , mais ceci n'est que pure spéculation.

### Exemple 2 (description naïve d'un atome)

Sur la cellule  $\mathcal{C}$  on considère la métrique à courbure scalaire constante, conforme à un potentiel  $g := |a|^{4/n-2}g_0$  où la fonction  $a$  est de la forme suivante :

$$a = \frac{c}{r}(\varepsilon \cos(\lambda_1 r)a_1 + \sin(\lambda_2 r)a_2) + a_3 \quad (2.104)$$

où  $c, \lambda_1, \lambda_2$  sont des constantes.

On impose les conditions suivantes :

Les fonctions  $a_1, a_2$  et  $a_3$  ne dépendent pas des variables  $x^1, x^2, x^3$  de  $\Omega$ , ce qui rend les calculs très simples (et donne en particulier une symétrie sphérique à la fonction  $a$ ). Les fonctions  $a_1$  et  $a_2$  vérifient  $\square_{g_0} a_1 = k_1 a_1$  et  $\square_{g_0} a_2 = k_2 a_2$  (et ne sont donc pas directement associées à des métriques oscillantes élémentaires).

La métrique  $|a_3|^{4/n-2} g_0$  est celle d'une métrique oscillante élémentaire (et porte donc les caractéristiques importantes : masse, charge électrique, spin, etc., comme dans l'exemple précédent). Elle vérifie l'équation 2.3.

Les constantes sont choisies de sorte que  $c\lambda_2 < \varepsilon \ll 1$ , les fonctions  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont supposées « du même ordre de grandeur » et sont  $\ll 1$ .

On en déduit :

- lorsque  $r \ll c\varepsilon$ , les termes en  $a_2$  et  $a_3$  sont négligeables devant le terme  $\frac{c\varepsilon}{r} \cos(\lambda_1 r) a_1$ .
- lorsque  $c\varepsilon < r \ll c$ , les termes en  $a_1$  et  $a_3$  sont négligeables devant le terme  $\frac{c\varepsilon}{r} \sin(\lambda_2 r) a_2$ .
- lorsque  $r \gg c$ , les termes en  $a_1$  et  $a_2$  sont négligeables devant le terme  $a_3$ .

Comme  $\Delta(\frac{1}{r} \cos(\lambda_1 r)) = \lambda_1^2(\frac{1}{r} \cos(\lambda_1 r))$  et  $\Delta(\frac{1}{r} \sin(\lambda_2 r)) = \lambda_2^2(\frac{1}{r} \sin(\lambda_2 r))$  ( $\Delta$  des géomètres), lorsque  $k_1 + \lambda_1^2 + S = k_2 + \lambda_2^2 + S = 0$  la fonction  $a$  vérifie  $\square_{g_0} a + S a = 0$  et est donc celle d'une métrique oscillante avec singularité (stationnaire), tout comme dans le premier exemple, mais ici la singularité est plus complexe. Le terme  $\frac{c\varepsilon}{r} \cos(\lambda_1 r) a_1$  caractérise le noyau d'un atome (prédominant pour  $r \ll c\varepsilon$ ). Le terme  $\frac{c\varepsilon}{r} \sin(\lambda_2 r) a_2$  caractérise le domaine électronique de l'atome (prédominant pour  $c\varepsilon < r \ll c$ ). Le terme  $a_3$  caractérise la « métrique oscillante » de l'atome lorsque l'on néglige la singularité.

La fonction  $\sin(\lambda_2 r)$  précise la « répartition en couches » du domaine électronique de l'atome, la fonction  $\cos(\lambda_1 r)$  celle de la structure du noyau de l'atome.

Bien entendu, l'exemple de l'atome que l'on vient de présenter est très « naïf », en particulier, la symétrie sphérique sur  $\Omega$  pour la fonction  $a$  que l'on a supposée est très restrictive, de plus, tout comme dans l'exemple précédent, nous nous sommes placés dans le cadre de l'approximation linéaire (mais ceci a permis de donner des « formules explicites »). L'utilisation de l'équation non-linéaire 2.2 modifiera certainement profondément les choses, du moins au voisinage des singularités, autrement dit dans l'étude de la structure du noyau de l'atome.

## Chocs de particules

Les métriques oscillantes avec singularités que l'on a décrites dans les deux exemples précédents, pour lesquels la fonction  $a$  vérifiait l'équation 2.2 où 2.3, ont une singularité « stationnaire » sur  $\Omega$  relativement à la cellule type  $\mathcal{C} = \Theta \times W$  où  $W = S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$ .

On considère une transformation de Lorentz « étendue »  $\sigma : \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}$  où  $\mathcal{C}' = \Theta' \times W$  qui provient d'une transformation de Lorentz standard  $\Lambda : \Theta' \rightarrow \Theta$  (cf.remarque7). En utilisant la fonction  $a \circ \sigma$  sur  $\mathcal{C}'$  le domaine de type « métrique oscillante avec une singularité stationnaire » relativement à  $\mathcal{C}$  devient un domaine de type « métrique oscillante avec une singularité se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  relativement à  $\mathcal{C}'$  si l'on a choisi la transformation de Lorentz  $\Lambda$  qui traduit le fait qu'un observateur associé à  $\mathcal{C}'$  se déplace à une vitesse  $-\vec{v}$  relativement à un observateur associé à  $\mathcal{C}$ .

On reprend maintenant l'expérience décrite au début de cette section (cf.2.21.1). On considère les deux domaines  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  sur lesquels les métriques sont respectivement  $g_1 = |a_1|^{4/n-2} g_0$

et  $g_2 = |a_2|^{4/n-2}g_0$ , mais on prend maintenant pour  $a_1$  et  $a_2$  des fonctions associées à des métriques oscillantes avec une singularité se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  (respectivement  $-\vec{v}$ ) suivant l'axe des  $x^1$  et de module  $|\vec{v}| = \lambda$ . Ce choix de « position » des singularités dans  $\mathbb{R}^3$  (non nécessairement sur un même axe) est une donnée importante. Ceci constitue les conditions aux limites de l'expérience considérée, qui, en langage de la physique classique, correspond à un « choc » de particules. On peut considérer par exemple que la fonction  $a_1$  caractérise un proton (cf. exemple 1) se déplaçant à une vitesse  $\vec{v}$  et que la fonction  $a_2$  caractérise un anti-proton (pour lequel, en particulier,  $Q$  devient  $-Q$ ) se déplaçant à une vitesse  $-\vec{v}$ .

Il s'agit, pour nous, d'étudier la fonction  $a$  définie sur  $\mathcal{C}$  correspondant à une métrique à courbure scalaire constante (qui vérifie donc l'équation non-linéaire 2.2 avec  $g_P = g_0$ ) telle que les conditions aux limites soient celles que l'on vient de préciser. La difficulté de cette étude est encore supérieure à celle présentée en 2.21.1 compte tenu de la complexité des métriques avec singularités qui interviennent. Il est, là encore, concevable que dans la décomposition spectrale de la fonction  $a$  apparaissent des « termes principaux » représentant des métriques oscillantes qui n'existent pas dans les conditions aux limites (création de particules) et que certains termes aient une « durée de vie » limitée. Ces dernières notions sont présentées dans la sous-section suivante.

### 2.21.3 Durée de vie, création, annihilation

On commence par la remarque suivante : Sur une cellule type  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times V$ , on considère la métrique  $g = |a|^{4/n-2}g_0$  où, pour  $t > 0$  et lorsque  $K$  est une constante positive :

$$a = e^{-Kt}a_0 \quad (2.105)$$

On suppose que la fonction  $a_0$  définie sur  $\mathcal{C}$  ne dépend pas de la variable  $t$  et vérifie  $\square_{g_0}a_0 = \nu a_0$  (on peut prendre, par exemple,  $a_0 = C\beta \cos(Qu - \sum_{k=1}^3 x^k)$  où  $\beta \in E_V(\mu)$  auquel cas  $\nu = -Q^2 + \sum_{k=1}^3 x^k + \mu$ ). Alors  $\square_{g_0}a + Sa = (K^2 + \nu + S)a$ .

Lorsque  $K^2 + \nu + S = 0$ , la fonction  $a$  définie par 2.105 vérifie la même équation que celle correspondant à une métrique oscillante élémentaire.

Les caractéristiques importantes de cette métrique oscillante sont les constantes  $Q$  et  $\mu$  ( $\mu$  pouvant se décomposer et introduire la notion de spin par exemple). La constante  $K$  apparaît comme une caractéristique analogue à la fréquence de masse (bien qu'ici, le terme « fréquence » ne soit plus adapté) mais avec un signe opposé.

On rappelle que la fréquence de masse  $M > 0$  a été définie (def.24) par  $M^2 = \mu + S - Q^2$  pour les métriques oscillantes élémentaires car elle correspond exactement à la notion habituelle de masse comme le montrent les équations données par les théorèmes 3 et 4. Mais ces théorèmes n'ont de sens que pour des métriques oscillantes pour lesquelles la fréquence de masse est bien définie et ne concernent pas des métriques de la forme  $g = |a|^{4/n-2}g_0$  où la fonction  $a$  vérifie 2.105. Ces métriques (de « pseudo-masse »  $K$ ) peuvent éventuellement apparaître par l'intermédiaire de termes importants dans la décomposition spectrale de fonctions solutions de l'équation 2.2 qui décrivent les résultats d'expériences du type de celles que l'on vient de présenter (rencontre de métriques oscillantes, chocs de particules, etc.).

Notons que, si un instrument de mesure crée un domaine  $\mathcal{C} = ]t_0, t_0 + T[ \times B \times S^1(\delta) \times W$  (cf. section 2.18) tel que la métrique soit de la forme  $g = |a|^{4/n-2} g_0$  où  $a = C e^{-Kt} \beta \cos(Qu - \sum_{k=1}^3 x^k)$ , la probabilité qu'une singularité se trouve à un instant  $t$  dans  $\mathcal{H}_t = \{t\} \times B \times W$  (après une « moyenne » sur  $u \in S^1(\delta)$ ) est de la forme  $C^2 e^{-2Kt}$ . Ceci décrit un phénomène **d'annihilation** de la « pseudo métrique oscillante » (dont les constantes caractéristiques sont  $Q$  et  $\mu$ ) pour laquelle la durée de vie moyenne est  $1/2K$ . (Remarquons qu'il n'y a aucune raison de supposer que  $K^2 + \nu + S = 0$  car  $e^{-Kt} a_0$  n'est qu'un terme particulier d'une décomposition spectrale).

Par analogie, on peut considérer les métriques de la forme  $g = |a|^{4/n-2} g_0$  où, pour  $t > 0$ ,  $a = (1 - e^{-Kt}) a_0$ , ce qui décrit un phénomène de **création** de « pseudo métrique oscillante ».

Bien sûr, les exemples de « pseudo métriques oscillantes » que l'on vient de présenter sont très particuliers et on peut définir, dans un cadre plus général, des « pseudo métriques oscillantes » qui ont des propriétés analogues : constantes caractéristiques, durée de vie (liée à la pseudo-masse), etc.

À suivre ...

# Chapitre 3

## Annexes

### 3.1 Démonstration du théorème 1

1. **On montre qu'un espace propre  $E$  de l'endomorphisme  ${}^eG|_{H_x}$  qui est de dimension 1 et de genre temps, est nécessairement unique dans  $H_x$ .**

Supposons que  $X_0$  et  $X'_0$  soient deux vecteurs propres de genre temps de  ${}^eG|_{H_x}$ , de valeurs propres respectives  $\lambda$  et  $\lambda'$ . On a :

$$G_x(X_0, X'_0) = \lambda g(X_0, X'_0)$$

$$G_x(X'_0, X_0) = \lambda' g(X'_0, X_0)$$

d'où  $\lambda = \lambda'$  car, d'après la signature de  $g|_{H_x}$ , nécessairement  $g(X_0, X'_0) \neq 0$ .

$X'_0$  est donc un vecteur propre pour la valeur propre  $\lambda$ . Comme l'espace propre est de dimension 1,  $X'_0$  est proportionnel à  $X_0$ .

2. Notons  $(\sigma_s)_{s \in \mathbb{R}}$  le groupe à 1 paramètre de difféomorphismes du champ  $Y$ . **On montre que le champ  $X_0$ , les fonctions  $\mu$  et  $\rho$  sont invariantes par  $\sigma_s$ .**

Par définition,  $\forall s \in \mathbb{R}, \quad \sigma_{s*}(Y) = Y$ .

D'autre part,  $\forall x \in \mathcal{D}, \quad \forall Z \in T_x(W_x)$ ,

$$\sigma_{s*x}(Z) \in T_{\sigma_s(x)}(S^1_{\sigma_s(x)}) \oplus T_{\sigma_s(x)}(W_{\sigma_s(x)}).$$

Ce point peut être vérifié, par exemple, en considérant la matrice jacobienne de  $\sigma_{s*}$  relative à une carte de l'atlas d'observation choisie en  $x$ .

Il s'en suit que  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,

$$\sigma_{s*}(T_x(S^1_x) \oplus T_x(W_x)) = T_{\sigma_s(x)}(S^1_{\sigma_s(x)}) \oplus T_{\sigma_s(x)}(W_{\sigma_s(x)}).$$

(Le fait que les  $\sigma_s$  soient des isométries n'a pas été utilisé pour obtenir cette égalité).

Comme les  $\sigma_x$  sont des isométries, on en déduit que :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \sigma_{s*}(H_x) = H_{\sigma_s(x)}.$$

Compte tenu de l'unicité de l'espace propre montrée en 1., on a :

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathcal{D}, \quad \sigma_{s*}(X_{0_x}) = \pm X_{0_{\sigma_s(x)}}.$$

On considère maintenant une carte de l'atlas d'observation  $(\mathcal{V}, \varphi)$  en  $x$ .

$\forall x' \in \mathcal{V}, \quad g(X_{0_{x'}}, \varphi^*(\frac{\partial}{\partial t})) < 0$  d'après l'orientation choisie, donc :  $\forall s \in \mathbb{R}$ ,

$$(*) \quad g(X_{0_{\sigma_s(x)}}, \varphi^*(\frac{\partial}{\partial t})) = \pm g(\sigma_{s*}(X_{0_x}), \varphi^*(\frac{\partial}{\partial t})) < 0$$

Mais pour  $s = 0$   $\sigma_s = I_d$  et  $g((X_{0_x}, \varphi^*(\frac{\partial}{\partial t}))) < 0$ .

Par continuité en «  $s$  » de  $g(\sigma_{s_x}(X_{0_x}, \varphi^*(\frac{\partial}{\partial t})))$  qui ne s'annule pas, on en déduit que le signe dans (\*) est nécessairement « + ». Alors,  $\forall s \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathcal{D}, \sigma_{s_x}(X_{0_x}) = X_{0_{\sigma_{s_x}}}$ .

Puisque  $G, Y, X_0$  sont invariants par les  $g$ -isométries  $\sigma_s$ , on déduit maintenant facilement que les fonctions  $\mu$  et  $\rho$  le sont aussi, autrement dit :  $Y(\mu) = Y(\rho) = 0$ .

**3. Les résultats que l'on vient d'obtenir permettent d'écrire les égalités suivantes :**

- (a)  $D_Y X_0 = D_{X_0} Y$ , ceci puisque le champ  $X_0$  est invariant par les isométries  $\sigma_s$  et donc :  $\mathcal{L}_Y X_0 = D_Y X_0 - D_{X_0} Y = 0$ . On en déduit aussi, puisque la torsion est nulle, que  $[X_0, Y] = 0$ .

- (b) (i)  $D_Y Y = 0$

(ii)  $\nabla \cdot Y = 0$

(iii)  ${}^e F(X_0) = -2D_Y X_0$

En effet :  $Y$  est un champ de Killing, donc  $\nabla_i Y_j = -\nabla_j Y_i$ , en particulier  $\nabla_i Y^i = \nabla \cdot Y = 0$ .

Comme  $Y^i Y_i = -1$ ,  $0 = \nabla_j (Y^i Y_i) = 2Y^i \nabla_j Y_i = -2Y^i \nabla_i Y_j$ .

De plus :

$$F_{ij} = \nabla_i Y_j - \nabla_j Y_i = 2\nabla_i Y_j = -2\nabla_j Y_i \quad (3.1)$$

Autrement dit  ${}^e F(X_0) = -2D_{X_0} Y = -2D_Y X_0$  d'après (a).

**4. Démonstration du 1. du théorème 1.**

$$G^{ij} = \mu X^i X^j + \sigma Y^i Y^j + P^{ij} = \mu X_0^i X_0^j + \rho(X_0^i Y^j + Y^i X_0^j) + (\sigma + \rho^2/\mu) Y^i Y^j + P^{ij}.$$

Alors, d'après la seconde identité de Bianchi :

$$\begin{aligned} \nabla_i G^{ij} &= X_0^j \nabla_i (\mu X_0^i) + \mu X_0^i \nabla_i X_0^j + \nabla_i (\rho(X_0^i Y^j + Y^i X_0^j)) + \nabla_i P^{ij} \\ &= X^j \nabla_i (\mu X^i) + \mu X^i \nabla_i X^j + \nabla_i P^{ij} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

car  $\nabla_i ((\sigma + \rho^2/\mu) Y^i Y^j) = \nabla_i (\sigma Y^i Y^j) = 0$ , en effet :

$\sigma$  et  $\sigma + \rho^2/\mu$  sont des fonctions invariantes par les  $\sigma_s$  du groupe à un paramètre de difféomorphismes associé à  $Y$ , donc  $Y(\sigma + \rho^2/\mu) = 0$ , alors :

$$\nabla_i ((\sigma + \rho^2/\mu) Y^i Y^j) = Y(\sigma + \rho^2/\mu) Y^j + (\sigma + \rho^2/\mu) (Y^i \nabla_i Y^j + Y^j \nabla_i Y^i) = 0$$

d'après (i) et (ii).

D'après 3.2 et puisque  $X_{0j} \nabla_i X_0^j = 0$  car  $X_{0j} X_0^j = -1$ , on peut écrire :

$$X_{0j} \nabla_i G^{ij} = -\nabla_i (\mu X_0^i) + X_{0j} \nabla_i (\rho(X_0^i Y^j + Y^i X_0^j)) + X_{0j} \nabla_i P^{ij} = 0.$$

Mais  $X_{0j} \nabla_i (\rho(X_0^i Y^j + Y^i X_0^j)) = 0$ , ce dernier point s'obtenant facilement en développant et en utilisant 2., 3.(a), (i), (ii), le fait que  $X_0^i X_{0i} = Y^i Y_i = -1$  et  $X_0^i Y_i = 0$ .

Alors :

$$\nabla_i (\mu X_0^i) = X_{0j} \nabla_i P^{ij} \quad (3.3)$$

ce qui est le premier résultat cherché puisque de plus :

$$\nabla_i(\mu X^i) = \nabla_i(\mu X_0^i) + \nabla_i(\rho Y^i) = \nabla_i(\mu X_0^i).$$

D'autre part, en réutilisant 3.2 :

$$X_j \nabla_i G^{ij} = X_j X^j \nabla_i(\mu X^i) + \mu X^i X_j \nabla_i X^j + X_j \nabla_i P^{ij} = 0$$

$$\text{mais } X^j X_j = -(1 + \rho^2/\mu^2), \text{ alors } X_j \nabla_i X^j = \frac{1}{2} \nabla_i(X^j X_j) = -\rho/\mu \nabla_i(\rho/\mu).$$

On peut donc écrire :

$$\rho X^i \nabla_i(\rho/\mu) = -(1 + \rho^2/\mu^2) \nabla_i(\mu X^i) + X_j \nabla_i P^{ij}$$

et d'après 3.3 :

$$\begin{aligned} \rho X^i \nabla_i(\rho/\mu) &= -(1 + \rho^2/\mu^2) X_{0j} \nabla_i P^{ij} + X_{0j} \nabla_i P^{ij} + (\rho/\mu) Y_j \nabla_i P^{ij} \\ &= -(\rho^2/\mu^2) X_{0j} \nabla_i P^{ij} + (\rho/\mu) Y_j \nabla_i P^{ij} \end{aligned}$$

ce qui donne le deuxième résultat cherché.

### 5. Démonstration du 2. du théorème 1.

$$\text{D'après 3.2 : } Y_j \nabla_i(\rho(X_0^i Y^j + Y^i X_0^j)) + Y_j \nabla_i P^{ij} = 0 \text{ puisque } Y_j X_0^j = 0.$$

$$\text{Mais : } Y_j \nabla_i(\rho(X_0^i Y^j + Y^i X_0^j)) = -\nabla_i(\rho X_0^i) + Y_j Y^i \nabla_i(\rho X_0^j) \text{ d'après (i) et (ii).}$$

De plus :

$$Y_j Y^i \nabla_i(\rho X_0^j) = \rho Y_j Y^i \nabla_i X_0^j = \rho Y_j X_0^i \nabla_i Y^j = 0 \text{ d'après 3.(a) et puisque } Y_j \nabla_i Y^j = 0$$

On obtient donc :

$$\nabla_i(\rho X_0^i) = Y_j \nabla_i P^{ij}.$$

Ce qui est le premier résultat cherché sachant que :

$$\nabla_i(\rho X^i) = \nabla_i(\rho X_0^i + (\rho^2/\mu) Y^i) = \nabla_i(\rho X_0^i) \text{ d'après 2. et (ii).}$$

D'autre part :

$$\nabla_i(P^{ij} Y_j) = Y_j \nabla_i P^{ij} + P^{ij} \nabla_i Y_j.$$

$$\text{Mais } P^{ij} \nabla_i Y_j = \frac{1}{2} P^{ij} F_{ij} = 0 \text{ car } P \text{ est symétrique et } F \text{ antisymétrique.}$$

$$\text{Alors } \nabla_i(P^{ij} Y_j) = Y_j \nabla_i P^{ij} \text{ autrement dit : } \nabla \cdot ({}^e P(Y)) = g(Y, \nabla \cdot P).$$

### 6. Démonstration du 3. du théorème 1.

$$\text{D'après 3.2 } \mu X^i \nabla_i X^j = -\nabla_i P^{ij} - X^j \nabla_i(\mu X^i)$$

C'est à dire :

$$\mu D_X X = -\nabla \cdot P - g(X_0, \nabla \cdot P) X \text{ puisque d'après 1., } \nabla_i(\mu X^i) = g(X_0, \nabla \cdot P).$$

Ce qui montre 3.(a).

D'autre part :

$$\begin{aligned} D_X X &= D_{X_0 + (\rho/\mu) Y} (X_0 + (\rho/\mu) Y) = D_{X_0} X_0 + D_{X_0} ((\rho/\mu) Y) + (\rho/\mu) D_Y X_0 \\ &= D_{X_0} X_0 + 2(\rho/\mu) D_Y X_0 + X_0(\rho/\mu) Y \text{ puisque } D_{X_0} Y = D_Y X_0, Y(\rho/\mu) = 0, D_Y Y = 0. \end{aligned}$$

$$\text{Comme } X(\rho/\mu) = X_0(\rho/\mu) = \frac{1}{\mu} g(Y, \nabla \cdot P) - (\rho/\mu^2) g(X_0, \nabla \cdot P)$$

on en déduit :

$$\mu D_{X_0} X_0 = \mu D_X X - 2\rho D_Y X_0 - \mu X_0(\rho/\mu) Y, \text{ puis :}$$

$$\begin{aligned} \mu D_{X_0} X_0 &= -\nabla \cdot P - g(X_0, \nabla \cdot P) X - 2\rho D_Y X_0 - g(Y, \nabla \cdot P) Y + (\rho/\mu) g(X_0, \nabla \cdot P) Y \\ &= -\nabla \cdot P + \rho^e F(X_0) - g(X_0, \nabla \cdot P) X_0 - g(Y, \nabla \cdot P) Y \\ &= \rho^e F(X_0) - pr_{\mathcal{T}^\perp}(\nabla \cdot P) \end{aligned}$$

Ce qui montre 3.(b).



**7. Démonstration du 4. du théorème 1.**

D'après 3.1  $\nabla_i F^{ij} = -2\nabla_i \nabla^j Y^i$ .

Mais :

$$\nabla_i \nabla^j Y^i = \nabla^j \nabla_i Y^i + R_k^j Y^k = R_k^j Y^k \quad (3.4)$$

puisque d'après (ii) :  $\nabla_i Y^i = 0$ .

On en déduit :

$$\nabla_i F^{ij} = -2R_k^j Y^k.$$

D'autre part, par définition :  $2R_k^j = G_k^j + S_g \delta_k^j$

(où  $S_g$  est la courbure scalaire et  $\delta_k^j$  les symboles de Krönecker)

En utilisant le fait que  $G_k^j = \mu X_0^j X_{0k} + \rho(X_0^j Y_k + Y^j X_{0k}) + (\sigma + \rho^2/\mu) Y^j Y_k + P_k^j$  on écrit, puisque  $X_{0k} Y^k = 0$  :

$$G_k^j Y^k = -\rho X_0^j - (\sigma + \rho^2/\mu) Y^j + P_k^j Y^k.$$

On obtient donc :

$$\nabla_i F^{ij} = \rho X_0^j + (\sigma + \rho^2/\mu - S_g) Y^j - P_k^j Y^k.$$

Alors d'après 3.1 :

$$2Y_j \nabla_i \nabla^j Y^i = -Y_j \nabla_i F^{ij} = \sigma + \rho^2/\mu - S_g \quad \text{puisque } P(Y, Y) = P_k^j Y^k Y_j = 0, \quad Y^j Y_j = -1, \quad X_0^j Y_j = 0.$$

Comme  $Y^j \nabla_j Y^i = 0$ , on peut écrire :

$$0 = \nabla_i (Y^j \nabla_j Y^i) = (\nabla_i Y^j) (\nabla_j Y^i) + Y^j \nabla_i \nabla_j Y^i = -\frac{1}{4} F_{ij} F^{ij} + Y^j \nabla_i \nabla_j Y^i.$$

Donc :  $\sigma + \rho^2/\mu - S_g = \frac{1}{2} F_{ij} F^{ij}$  et finalement :

$$\nabla_i F^{ij} = \rho X_0^j + \frac{1}{2} (F_{ij} F^{ij}) Y^j - P_k^j Y^k.$$

Ce qui montre 4.

### 3.2 Démonstration des propriétés 1, 2 et 3 sur les métriques représentant un potentiel actif (paragraphe 1.4.2 B.) et du lemme 2

#### 1. Démonstration des propriétés 1. 2. 3.

(a) Symétrie de  ${}^e h_x$ .

$$g_0({}^e h_x(X), Y) = g_{0ij} h_k^i X^k Y^j = h_{jk} X^k Y^j = h_{kj} X^k Y^j = g_{0ki} h_j^i Y^j X^k = g_0(X, {}^e h_x(Y)).$$

(b) Lorsque un endomorphisme est nilpotent, il existe toujours une base dans laquelle sa matrice est triangulaire strictement supérieure, donc à trace nulle. C'est le cas, quel que soit  $q \in \mathbb{N}^*$ , pour  $({}^e h_x)^q$ .

(c) En chaque  $x \in \mathcal{C}$  :

$$(g_0)_B^{-1}(g)_B = (g_0)_B^{-1}(g_0)_B + ({}^e h)_B = I + ({}^e h)_B$$

où  $( )_B$  signifie « la matrice de » dans la base  $B$ .

Dans une base  $B$  où la matrice de  ${}^e h_x$  est triangulaire strictement supérieure on a :

$$\det(g_0)_B^{-1} \det(g)_B = \det(I + ({}^e h_x)_B) = 1$$

$$\text{donc } \det(g)_B = \det(g_0)_B.$$

Si l'on désigne par  $P$  la matrice de passage d'une base  $B'$  quelconque à la base  $B$ , on obtient :

$$(\det P)^2 \det(g)_{B'} = (\det P)^2 \det(g_0)_{B'}$$

d'où le résultat.

#### 2. Démonstration du lemme 2

Pour  $x \in \mathcal{C}$ , notons  $A$  le sous-espace vectoriel de  $T_x(\mathcal{C})$  engendré par

$Y$  et  $X_0$  et  $B$  le sous-espace vectoriel engendré par  $(Y, {}^e h(Y), \dots, {}^e h^{p-1}(Y), X_0, \dots, {}^e h^{p-1}(X_0))$ .  
la métrique  $g_0$  est non dégénérée par hypothèse puisque de signature  $(-, +, +, +, -, +, \dots, +)$ .

Comme  $Y$  et  $X_0$  sont de genre temps et  $g_0$ -orthogonaux,  $g_0|_A$  est de signature  $(-, -)$ .

$g_0|_{A^\perp}$  est donc de signature  $(+, +, \dots, +)$  et est un produit scalaire.

Puisque  $B^\perp \subset A^\perp$ ,  $g_0|_{B^\perp}$  est encore un produit scalaire. Comme  $({}^e h)^p = 0$ ,  $B$  est stable par  ${}^e h$  et, puisque  ${}^e h$  est  $g_0$ -symétrique,  $B^\perp$  est aussi stable par  ${}^e h$ .

${}^e h|_{B^\perp}$  est un endomorphisme de  $B^\perp$   $g_0|_{B^\perp}$ -symétrique et, comme  $g_0|_{B^\perp}$  est un produit scalaire,  ${}^e h|_{B^\perp}$  est diagonalisable donc identiquement nul puisque nilpotent.

On a donc montré que  ${}^e h|_{B^\perp} = 0$ . Comme  $T_x(\mathcal{C}) = B \oplus B^\perp$  car  $B^\perp$  et (donc)  $B$  sont  $g_0$ -réguliers, le lemme 2 est démontré.

### 3.3 Démonstration de la proposition 5

On reprend ici les notations utilisées lors de la détermination des géodésiques dans la section 1.5.1.

Dans un système de coordonnées standard de la cellule  $\mathcal{C}$ , on note :

$\Gamma_{ij}^k$  (resp.  $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ ) les symboles de Christoffel de  $g$  (resp.  $g_0$ ).

On note  $T_{ij}^k$  les coordonnées du **tenseur**  $(\Gamma_{ij}^j - \tilde{\Gamma}_{ij}^k)$ .

On a, lorsque  $g = g_0 + h$  :

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\nabla_i h_{jl} + \nabla_j h_{il} - \nabla_l h_{ij}) \quad (3.5)$$

où les  $\nabla_i$  sont relatifs à  $g_0$ .

De plus, lorsque l'on note  $R_{ij}$  (resp.  $\tilde{R}_{ij}$ ) la courbure de Ricci de  $g$  (resp.  $g_0$ ), on montre facilement que :

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \nabla_k T_{ij}^k - T_{li}^k T_{kj}^l \quad (3.6)$$

**Ici  $h = -2\nu X_1 \otimes X_1$  et, dans la suite des calculs de cette démonstration,  $X_1$  sera noté  $X$  pour simplifier l'écriture.**

L'expression de  $T_{ij}^k$  a été donnée par 1.5 mais elle se simplifie ici grâce à l'hypothèse  $DX = 0$  plus forte que le fait que  $X$  soit un champ de Killing, on obtient :

$$T_{ij}^k = -(X_i X^k \nabla_j \nu + X_j X^k \nabla_i \nu - X_i X_j \nabla^k \nu) \quad (3.7)$$

où l'on a utilisé aussi les propriétés :  $X^k X_k = 0$  et  $X(\nu) = 0$ .

#### 1. Calcul de $R_{ij}$ .

Avec 3.7 on obtient :

$$T_{li}^k T_{kj}^l = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_k T_{ij}^k = -(X_i X^k \nabla_k \nabla_j \nu + X_j X^k \nabla_k \nabla_i \nu - X_i X_j \nabla_k \nabla^k \nu)$$

D'où, puisque  $X(\nu) = 0$  :

$$\nabla_k T_{ij}^k = -(\Delta_{g_0} \nu) X_i X_j \quad (\text{où } \Delta_{g_0} := -\nabla^k \nabla_k).$$

Ce qui donne finalement pour la courbure de Ricci d'après 3.6 :

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} - (\Delta_{g_0} \nu) X_i X_j.$$

#### 2. Calcul de $S_g$ .

$$S_g = g^{ij} R_{ij} = (g_0^{ij} + 2\nu X^i X^j)(\tilde{R}_{ij} - (\Delta_{g_0} \nu) X_i X_j).$$

Soit, en développant et puisque  $X^k X_k = 0$  :

$$S_g = S_{g_0} + 2\nu R_{icc_{g_0}}(X_1, X_1).$$

#### 3. $g(X_1, X_1) = g^{ij} X_i X_j = (g_0^{ij} + 2\nu X^i X^j) X_i X_j = 0$ .

D'autre part :

$$\nabla_{g,i} X^j = \partial_i X^j + \Gamma_{il}^j X^l = \nabla_i X^j + T_{il}^j X^l = T_{il}^j X^l.$$

Et en utilisant 3.7 :

$$\nabla_{g,i} X^j = 0.$$

4.  $\nabla_{g,i} Y^j = \partial_i Y^j + \Gamma_{il}^j Y^l = \nabla_i Y^j + T_{il}^j Y^l$ .  
 $\nabla_i Y^j = \partial_i Y^j + \tilde{\Gamma}_{il}^j Y^l = \tilde{\Gamma}_{il}^j Y^l = \frac{1}{2} g_0^{mj} (\partial_i g_{0km} + \partial_k g_{0im} - \partial_m g_{0ik}) Y^k$ .  
 Mais  $Y^4 = 1$  et  $Y^k = 0$  pour  $k \neq 4$ , donc, compte tenu de la définition de  $g_0$  :  
 $\nabla_i Y^j = 0$ .  
 D'autre part d'après 3.7, puisque  $Y(v) = 0$  et  $Y^j X_j = 0$  :  
 $T_{il}^j Y^l = 0$ .  
 Finalement :  
 $\nabla_{g,i} Y^j = 0$ .

### 3.4 Démonstration de la proposition 6

On repart des expressions 3.5 et 3.6 données dans la section précédente.

**Ici  $h = \Upsilon^b \otimes X_2^b + X_2^b \otimes \Upsilon^b$  et, dans la suite des calculs de cette démonstration,  $X_2$  sera noté simplement  $X$  pour simplifier l'écriture.**

Calcul de  $T_{ij}^k$ .

$$T_{ij}^k = \frac{1}{2} (g_0^{kl} - h^{kl} + h^{km} h_m^l) (*) \quad (3.8)$$

où l'on a noté :

$$(*) = \nabla_j (\Upsilon_i X_l + \Upsilon_l X_i) + \nabla_i (\Upsilon_j X_l + \Upsilon_l X_j) - \nabla_l (\Upsilon_i X_j + \Upsilon_j X_i)$$

On a, puisque  $DX = 0$  :

$$(*) = X_l (\nabla_j \Upsilon_i + \nabla_i \Upsilon_j) + X_i (\nabla_j \Upsilon_l + \nabla_l \Upsilon_j) + X_j (\nabla_i \Upsilon_l + \nabla_l \Upsilon_i).$$

C'est à dire, puisque  $F = d\Upsilon^b$  :

$$(*) = X_l (\nabla_j \Upsilon_i + \nabla_i \Upsilon_j) + X_i F_{jl} + X_j F_{il}$$

Alors :

$$g_0^{kl} (*) = X^k (\nabla_j \Upsilon_i + \nabla_i \Upsilon_j) + X_i F_j^k + X_j F_i^k.$$

$$\nabla_j \Upsilon_i = \partial_j \Upsilon_i - \tilde{\Gamma}_{ij}^l \Upsilon_l = \partial_j \Upsilon_i - \frac{1}{2} g_0^{lm} (\partial_i g_{0jm} + \partial_j g_{0im} - \partial_m g_{0ij}) \Upsilon_l.$$

On en déduit que  $\nabla_j \Upsilon_i$  ne dépend pas des variables de  $\Theta$  sous l'hypothèse  $H_E$  et des variables de  $\Theta \times S^3(\rho)$  sous l'hypothèse  $H'_E$ . Il en est de même en particulier pour  $F_{ij}$  et on en déduit  $X^l F_{il} = 0$ .

Comme de plus  $X^l X_l = 0$ , on a :

$$h^{kl} (*) = (\Upsilon^k X^l + \Upsilon^l X^k) (*) = \Upsilon^l X^k (X_i F_{jl} + X_j F_{il}).$$

Et :

$$h^{km} h_m^l (*) = \Upsilon^m \Upsilon_m X^k X^l (*) = 0.$$

Alors, d'après 3.8 :

$$2T_{ij}^k = X^k (\nabla_j \Upsilon_i + \nabla_i \Upsilon_j) + X_i F_j^k + X_j F_i^k - \Upsilon^l X^k (X_i F_{jl} + X_j F_{il}) \quad (3.9)$$

1. Calcul de  $R_{ij}$ .

D'après la dépendance par rapport aux variables déduite des lignes précédentes, on a :

$$X^k \nabla_k (\nabla_j \Upsilon_i + \nabla_i \Upsilon_j) = 0 \quad \text{et} \quad X^k \nabla_k (\Upsilon^l (X_i F_{jl} + X_j F_{il})) = 0.$$

Alors :

$$\nabla_k T_{ij}^k = \frac{1}{2}(X_i \nabla_k F_j^k + X_j \nabla_k F_i^k).$$

D'autre part, d'après 3.9, en développant et en utilisant les propriétés déjà citées :

$$4T_{li}^k T_{kj}^l = F_l^k F_k^l X_i X_j.$$

D'où :

$$R_{ij} = \tilde{R}_{ij} + \frac{1}{2}(X_i \nabla_k F_j^k + X_j \nabla_k F_i^k) - \frac{1}{4}F_l^k F_k^l X_i X_j \quad (3.10)$$

Ce qui donne le résultat 1. de la proposition 6 puisque  $F_j^k = -F^k_j$ .

2. Calcul de  $S_g$ .

$$S_g = g^{ij} R_{ij} = (g_0^{ij} - h^{ij} + h_k^i h^{kj}) R_{ij}.$$

D'après 3.10 et les propriétés déjà utilisées :

$$g_0^{ij} R_{ij} = S_{g_0}.$$

D'autre part, puisque  $g_0$  est une métrique produit et d'après les hypothèses  $H_E$  et  $H'_E$  :

$$h^{ij} R_{ij} = (\Upsilon^i X^j + \Upsilon^j X^i) R_{ij} = 2\tilde{R}_{ij} \Upsilon^i X^j = 0.$$

$$h_k^i h^{kj} R_{ij} = \Upsilon^k \Upsilon_k R_{ij} X^i X^j = \Upsilon^k \Upsilon_k \tilde{R}_{ij} X^i X^j.$$

Finalement :

$$S_g = S_{g_0} + (\Upsilon^k \Upsilon_k) R_{icc_{g_0}}(X_2, X_2).$$

3.  $g(X_2, X_2) = g^{ij} X_i X_j = (g_0^{ij} - \Upsilon^i X^j - \Upsilon^j X^i + \Upsilon^k \Upsilon_k X^i X^j) X_i X_j = 0$ .

D'autre part :

$$\nabla_{g,i} X^j = \partial_i X^j + \Gamma_{il}^j X^l = \nabla_i X^j + T_{il}^j X^l = T_{il}^j X^l.$$

Et en utilisant 3.9 et les propriétés déjà citées :  $\nabla_{g,i} X^j = 0$ .

4. Se déduit rapidement du lemme suivant qui donne un résultat plus général.

*Lemme 3. On considère une cellule type  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  avec un système de coordonnées  $(x^0, x^1, \dots, x^{n-1})$ . Soit  $g$  le tenseur métrique transporté sur  $\mathcal{C}$  du tenseur  $g_{\mathcal{M}}$  et  $Y$  le champ de vecteurs défini comme précédemment ( $Y^i = 0$  quel que soit  $i \neq 4$ ,  $Y^4 = 1$ ).*

*Alors :*

*$Y$  est un champ de Killing si et seulement si, dans le système de coordonnées,  $\partial_4 g_{ij} = 0$  quels que soient  $i, j$  (autrement dit, les termes de la matrice  $(g_{ij})$  ne dépendent pas de  $x^4$ ).*

**Démonstration du lemme.**

$Y$  est un champ de Killing si et seulement si  $\nabla_i Y_j + \nabla_j Y_i = 0$ . On a :

$$\nabla_i Y_j = \partial_i Y_j - \Gamma_{ij}^k Y_k.$$

Alors :

$$\nabla_i Y_j + \nabla_j Y_i = \partial_i Y_j + \partial_j Y_i - 2\Gamma_{ij}^k Y_k$$

Dans le système de coordonnées choisi,  $Y_j = g_{ij} Y^i = g_{4j}$  donc :

$$\nabla_i Y_j + \nabla_j Y_i = \partial_i(g_{4j}) + \partial_j(g_{4i}) - 2\Gamma_{ij}^k g_{4k}, \text{ mais :}$$

$$\Gamma_{ij}^k g_{4j} = \frac{1}{2} \delta_4^l (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) = \frac{1}{2} (\partial_i g_{4j} + \partial_j g_{4i} - \partial_4 g_{ij}).$$

Alors :

$$\nabla_i Y_j + \nabla_j Y_i = \partial_4 g_{ij}$$

d'où le résultat.

### 3.5 Un exemple très simple d'approximation des solutions d'une équation non linéaire par celles d'une équation linéaire

Le seul intérêt de l'exemple que l'on va présenter est d'aider à comprendre le processus d'approximation des solutions de l'équation fondamentale 2.2 par les solutions de l'équation linéaire 2.3 associée aux domaines de type « métrique oscillante dans un potentiel ».

Sur l'intervalle  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ , on considère l'équation différentielle :

$$(*) \quad y' - y = y^2$$

(L'équation  $(*)$  est ici d'ordre 1 pour que les calculs soient très simples, l'équation 2.2 est bien sûr d'ordre 2).

La solution de cette équation différentielle qui vérifie la condition « au bord »  $y(0) = \varepsilon$  (que l'on supposera ensuite  $\ll 1$ ) est, comme on peut le vérifier rapidement :

$$y(t) = \frac{\varepsilon e^t}{1 + \varepsilon(1 - e^t)}$$

On considère l'équation linéaire associée :

$$(**) \quad y' - y = 0$$

la solution  $y_1$  de cette équation qui vérifie la même condition « au bord »  $y_1(0) = \varepsilon$  est :

$$y_1(t) = \varepsilon e^t$$

Comme on le voit, lorsque  $\varepsilon \ll 1$ , cette solution est « très proche » de celle de  $(*)$  puisque  $y_1(t)/y(t) = 1 + \varepsilon(1 - e^t)$  et  $-2 < (1 - e^t) < 0$  car on a limité  $t$  à l'intervalle  $[0, 1]$ .

### 3.6 Démonstration de la proposition 8

1. Soient  $\varphi : \Theta \times S^1(\delta) \times V_1 \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta \in E_{V_2}(\mu_2)$ .

$$\square_{g_{\mathcal{P}}}(\varphi\beta) = -\nabla^i \nabla_i(\varphi\beta) = \beta \square_{g_{\mathcal{P}}}(\varphi) + \varphi \square_{g_{\mathcal{P}}}(\beta) - 2\nabla^i \varphi \nabla_i \beta$$

où les  $\nabla_i$  sont relatifs à  $g_{\mathcal{P}}$ .

$$\nabla^i \varphi \nabla_i \beta = g_{\mathcal{P}}^{ij} \nabla_j \varphi \nabla_i \beta = g_0^{ij} \nabla_j \varphi \nabla_i \beta + 2\nu X_1^i X_1^j \nabla_j \varphi \nabla_i \beta = 0$$

puisque  $g_0^{ij} \nabla_j \varphi \nabla_i \beta = 0$  et  $X_1^i \nabla_i \beta = X_1(\beta) = 0$  compte tenu des hypothèses.

D'autre part :

$$\square_{g_{\mathcal{P}}} \beta = |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} g_{\mathcal{P}}^{ij} \partial_j \beta) \quad (3.11)$$

puisque  $|g_{\mathcal{P}}| = |g_0|$ .

$$\text{Mais } g_{\mathcal{P}}^{ij} \partial_j \beta = g_0^{ij} \partial_j \beta + 2\nu X_1^i X_1^j \partial_j \beta = g_0^{ij} \partial_j \beta.$$

Alors :

$$\square_{g_{\mathcal{P}}} \beta = \square_{g_0} \beta = \mu_2 \beta.$$

Finalement :

$$\square_{g_{\mathcal{P}}}(\varphi\beta) = (\square_{g_{\mathcal{P}}}(\varphi) + \mu_2 \varphi)\beta.$$

2. Ici  $\nabla^i \varphi \nabla_i \beta = g_0^{ij} \nabla_j \varphi \nabla_i \beta - (\Upsilon^i X_2^j + \Upsilon^j X_2^i) \nabla_j \varphi \nabla_i \beta + \Upsilon^k \Upsilon_k X_2^i X_2^j \nabla_j \varphi \nabla_i \beta$   
 mais, compte tenu des hypothèses :

$$\Upsilon^i \nabla_i \beta = \Upsilon(\beta) = 0 \quad \text{et} \quad X_2^i \nabla_i \beta = X_2(\beta) = 0 \quad (3.12)$$

d'où :

$$(\Upsilon^i X_2^j + \Upsilon^j X_2^i) \nabla_j \varphi \nabla_i \beta = 0.$$

Alors, comme dans 1. :

$$\nabla^i \varphi \nabla_i \beta = 0.$$

d'autre part :

$$g_{\mathcal{P}}^{ij} \partial_j \beta = g_0^{ij} \partial_j \beta - (\Upsilon^i X_2^j + \Upsilon^j X_2^i) \partial_j \beta + \Upsilon^k \Upsilon_k X_2^i X_2^j \partial_j \beta = g_0^{ij} \partial_j \beta.$$

D'où, d'après 3.11 et 3.12 :

$$\square_{g_{\mathcal{P}}} \beta = \square_{g_0} \beta = \mu_2 \beta.$$

Finalement :

$$\square_{g_{\mathcal{P}}}(\varphi \beta) = (\square_{g_{\mathcal{P}}}(\varphi) + \mu_2 \varphi) \beta.$$

### 3.7 Démonstration du théorème 3

#### 1. Dans un potentiel neutre.

La fonction  $a$  vérifie :  $a = \varphi \beta$  où  $\varphi : \Theta \times S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta \in E_W(\mu)$ .

On sait que :  $\square_{g_0} a + S a = 0$  où  $S = \frac{n-2}{4(n-1)} S_{g_0}$ .

Alors :

$$\beta(\square_{\Theta \times S^1} \varphi + \mu \varphi + S \varphi) = 0 \quad \text{où} \quad \square_{\Theta \times S^1} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial (x^j)^2}$$

Puis :

$$\square_{\Theta} \varphi + (\mu + S - \lambda) \varphi = 0 \quad \text{où} \quad \square_{\Theta} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial (x^j)^2},$$

c'est à dire :

$$\square_{\Theta} \varphi + M^2 \varphi = 0.$$

Alors, quel que soit  $x \in \Theta$ ,  $\mathbb{C}_{\lambda}((\square_{\Theta} \varphi + M^2 \varphi)_x(\cdot)) = 0$

où  $\mathbb{C}_{\lambda}$  est l'isomorphisme défini dans la section 2.10.

Comme  $\mathbb{C}_{\lambda}((\square_{\Theta} \varphi)_x(\cdot)) = \square_{\Theta}(\mathbb{C}_{\lambda}(\varphi_x(\cdot))) = \square_{\Theta} a_c$  on en déduit :

$$\square_{\Theta} a_c + M^2 a_c = 0.$$

#### 2. Dans un potentiel sans électromagnétisme.

La cellule type est  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$  où  $\Theta = I \times \mathcal{U} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ ,  $a = \varphi \beta$  avec  $\varphi : \Theta \times S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta \in E_W(\mu)$ , mais maintenant :

$$\square_{g_{\mathcal{P}}} a + S a = 0 \quad \text{où} \quad g_{\mathcal{P}} = g_0 + h \quad \text{et} \quad h = -2\nu X_1 \otimes X_1.$$

(Dans les calculs qui suivent  $g_{\mathcal{P}}$  sera noté  $g$  pour simplifier l'écriture).

Dans un système de coordonnées standard de la cellule  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$ , on a :

$$\square_g a = -|g|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (g^{ij} |g|^{\frac{1}{2}} \partial_j a) \quad \text{où} \quad |g| := \det g = \det g_0 \quad (\text{cf 1.4.2})$$

$$\text{et} \quad g^{ij} = g_0^{ij} + 2\nu X^i X^j.$$

Alors :

$$\square_g a = \square_{g_0} a - 2|g|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (v|g|^{\frac{1}{2}} X^i X^j \partial_j a).$$

D'après les hypothèses de théorème :  $X^1 = X^2 = X^3 = 0$  et  $v$  ne dépend que des variables  $x^1, x^2, x^3$ .

Donc :

$$|g|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (v|g|^{\frac{1}{2}} X^i X^j \partial_j a) = v|g|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g|^{\frac{1}{2}} X^i X(a)).$$

Mais :

$$\begin{aligned} |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g|^{\frac{1}{2}} X^i X(a)) &= |g|^{-\frac{1}{2}} (\partial_i (|g|^{\frac{1}{2}} X^i)) X(a) + X^i \partial_i (X(a)) \\ &= (\nabla \cdot X) X(a) + X(X(a)). \end{aligned}$$

De plus, comme  $X(\beta) = 0$ ,  $X$  est tangent à  $\mathbb{R} \times W$  et  $X^0 = -1$  on en déduit :

$$X(a) = \beta X(\varphi) + \varphi X(\beta) = -\beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{et} \quad X(X(a)) = \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Alors, puisque  $DX = 0$  :

$$|g|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (v|g|^{\frac{1}{2}} X^i X^j \partial_j a) = \beta \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - (\nabla \cdot X) \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) = \beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

D'où, comme  $\square_{g_0} a + Sa = \beta(\square_{\Theta} \varphi + M^2 \varphi)$  (de même que dans 1.) :

$$0 = \square_g a + Sa = \beta(\square_{\Theta} \varphi + M^2 \varphi - 2v \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}).$$

En prenant l'image par l'isomorphisme  $\mathbb{C}_\lambda$ , on obtient l'équation 2.17.

### 3. Dans un potentiel électromagnétique.

La fonction  $a$  vérifie encore :  $a = \varphi \beta$  où  $\varphi : \Theta \times S^1(\delta) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta \in E_W(\mu)$ .

On a :

$$\square_{g_{\mathcal{P}}} a + Sa = 0 \quad \text{où} \quad g_{\mathcal{P}} = g_0 + h \quad \text{et} \quad h = \Upsilon^b \otimes X_2^b + X_2^b \otimes \Upsilon^b \quad (3.13)$$

(Dans les calculs qui suivent  $g_{\mathcal{P}}$  sera noté  $g$  pour simplifier l'écriture,  $\Upsilon$  sera noté  $A$  et correspond au champ de vecteurs « potentiel électromagnétique » défini sur  $\Theta$  et  $X_2$  sera noté simplement  $X$ ).

Le champ de vecteurs  $A$  est tangent à  $\Theta$  et ne dépend que des variables de  $\Theta$ .

Dans un système de coordonnées standard de la cellule  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times W$ , on a :

$$\square_g a = -|g|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (g^{ij} |g|^{\frac{1}{2}} \partial_j a) \quad \text{où} \quad |g| := \det g = \det g_0$$

$$\text{et } g^{ij} = g_0^{ij} - h^{ij} + h_k^i h^{kj} \quad \text{avec} \quad h^{ij} = A^i X^j + A^j X^i.$$

Compte tenu des hypothèses :

(i)  $A^i = 0$  si  $i > 3$ ,  $X^j = 0$  si  $j < 4$  et  $X^4 = -1$  puisque  $g_0(X_2, Y) = 1$

Alors :

$$\square_g a + Sa = \square_{g_0} a + Sa + (*) + (**) \quad (3.14)$$

$$\text{où } (*) := |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} h^{ij} \partial_j a) \quad \text{et} \quad (**) := -|g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} h_k^i h^{kj} \partial_j a).$$

Comme  $g_0$  est une métrique « produit » sur  $\Theta \times S^1(\delta) \times W$  on a (cf. 1. et 2.) :

$$\square_{g_0} a + Sa = \beta(\square_{\Theta} \varphi + M^2 \varphi) \quad (3.15)$$



(a) Étude de (\*).

$$(*) = (*_1) + (*_2) \quad \text{où} \quad (*_1) := |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} h^{ij} \varphi \partial_j \beta)$$

$$\text{et } (*_2) := |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} h^{ij} \beta \partial_j \varphi).$$

$$(*_1) = |g_0|^{-\frac{1}{2}} (\partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} A^i X^j \varphi \partial_j \beta) + \partial_j (|g_0|^{\frac{1}{2}} A^i X^j \varphi \partial_i \beta)) = 0$$

car  $X^j \partial_j \beta = 0$  et  $A^i \partial_i \beta = 0$  d'après (i) puisque  $\partial_i \beta = 0$  si  $i \leq 4$ .

D'autre part :

$$(*_2) := (*_{2_1}) + (*_{2_2}) \quad \text{où} \quad (*_{2_1}) = |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} A^i X^j \beta \partial_j \varphi)$$

$$\text{et } (*_{2_2}) = |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_j (|g_0|^{\frac{1}{2}} A^i X^j \beta \partial_i \varphi).$$

$$(*_{2_1}) = -|g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} A^i \beta \partial_4 \varphi) \quad \text{puisque } \partial_j \varphi = 0 \text{ si } j > 4 \quad \text{et} \quad X^4 = -1$$

$$(\partial_4 \varphi := \frac{\partial \varphi}{\partial u}).$$

Alors, comme  $A^i = 0$  pour  $i \geq 4$  :

$$\begin{aligned} (*_{2_1}) &= -\beta (|g_0|^{-\frac{1}{2}} (\partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} A^i)) \partial_4 \varphi + A^i \partial_i \partial_4 \varphi) \\ &= -\beta ((\nabla_{g_0} \cdot A) \partial_4 \varphi + A(\partial_4 \varphi)). \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $X^4 = -1$  :

$$(*_{2_2}) = -|g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_4 (|g_0|^{\frac{1}{2}} \beta A(\varphi)) + \sum_{j>4} |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_j (|g_0|^{\frac{1}{2}} X^j \beta A(\varphi)).$$

Mais, puisque  $|g_0|$ ,  $\beta$ , et les  $A^i$  ne dépendent pas de  $x^4 = u$  :

$$(*_{2_2}) = -\beta A(\partial_4 \varphi).$$

Finalement :

$$(*) = (*_1) + (*_{2_1}) + (*_{2_2}) = -\beta ((\nabla_{g_0} \cdot A) \partial_4 \varphi + 2A(\partial_4 \varphi)) \quad (3.16)$$

(b) Étude de (\*\*).

$$(**) = -|g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} h_k^i h^{kj} \partial_j a)$$

$$= -|g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} (A^i X_k + A_k X^i) (A^k X^j + A^j X^k) \partial_j a)$$

Alors, puisque  $A^k X_k = 0$  et  $X^k X_k = 0$  :

$$(**) = -|g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} X^i X^j A_k A^k \partial_j (\varphi \beta))$$

Mais, comme  $A_k A^k$  ne dépend pas des variables de  $S^1 \times W$  :

$$(**) = -A_k A^k |g_0|^{-\frac{1}{2}} (\partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} X^i X^j \beta \partial_j \varphi) + \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} X^i X^j \varphi \partial_j \beta)).$$

Comme  $X^j \partial_j \varphi = -\partial_4 \varphi$  puisque  $\partial_j \varphi = 0$  pour  $j > 4$  et  $X(\beta) = 0$ , on obtient :

$$(**) = A_k A^k |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} X^i \beta \partial_4 \varphi).$$

En considérant  $i = 4$  puis  $i > 4$ , on trouve :

$$(**) = -A_k A^k (\beta \partial_4^2 \varphi - |g_0|^{-\frac{1}{2}} (\sum_{i>4} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} X^i \beta)) \partial_4 \varphi).$$

Ce que l'on peut écrire :

$$(**) = -A_k A^k (\beta \partial_4^2 \varphi - (\nabla_{g_0} \cdot (\beta X)) \partial_4 \varphi).$$

Et, puisque  $\nabla_{g_0} \cdot (\beta X) = X(\beta) + \beta \nabla_{g_0} \cdot X = 0$  :

$$(**) = -A_k A^k \beta \partial_4^2 \varphi \quad (3.17)$$

(c) Fin de la démonstration de 3.

D'après 3.13, 3.14, 3.15, 3.16 et 3.17 on a :

$$0 = \square_g a + S a = (\square_\Theta \varphi + M^2 \varphi - (\nabla_{g_0} \cdot A) \partial_4 \varphi - 2A(\partial_4 \varphi) - A_k A^k \partial_4^2 \varphi) \beta.$$

Cette équation se met aussi sous la forme :

$$- \sum_{j=0}^3 \varepsilon_j \left( \frac{\partial}{\partial x^j} + A^j \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 \varphi + M^2 \varphi = 0 \quad (3.18)$$

où  $\varepsilon_0 = -1$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$ ,  $\frac{\partial}{\partial u} = \partial_4$ .

Pour obtenir l'équation en  $a_c$  donnée dans le théorème il suffit de composer les deux membres de l'équation 3.18 par l'isomorphisme  $\mathbb{C}_\lambda$ . On vérifie facilement que :

$$\mathbb{C}_\lambda \circ ((\square_\Theta \varphi)_x(\cdot)) = (\square_\Theta a_c)(x), \quad \mathbb{C}_\lambda \circ ((\frac{\partial \varphi}{\partial u})_x(\cdot)) = -iQ^+ a_c(x),$$

$$\mathbb{C}_\lambda \circ ((\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2})_x(\cdot)) = -(Q^+)^2 a_c(x).$$

L'équation obtenue est alors :

$$\sum_{j=0}^3 \varepsilon_j (i \frac{\partial}{\partial x^j} + Q^+ A^j)^2 a_c + M^2 a_c = 0.$$

### 3.8 La sphère $S^3$ , la fibration de Hopf, les espaces propres du laplacien riemannien

#### 3.8.1 La fibration de Hopf

On considère l'application  $\tilde{\Pi} : \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :

$$\tilde{\Pi}(x_1, x_2, x_3, x_4) := (x_1 x_3 + x_2 x_4, x_1 x_4 - x_2 x_3, \frac{1}{2}(x_3^2 + x_4^2 - x_1^2 - x_2^2)) \quad (3.19)$$

Qui s'écrit aussi, en posant  $z_1 = x_1 + ix_2$  et  $z_2 = x_3 + ix_4$  :

$$\tilde{\Pi}(z_1, z_2) = (Re(\bar{z}_1 z_2), Im(\bar{z}_1 z_2), \frac{1}{2}(|z_2|^2 - |z_1|^2))$$

On note :

$$S^3(1) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / \sum_{i=1}^4 x_i^2 = 1\}$$

$$S^2(\frac{1}{2}) = \{(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3 / \sum_{i=1}^3 y_i^2 = \frac{1}{4}\}$$

Il est facile de vérifier que :  $\tilde{\Pi}(S^3(1)) = S^2(\frac{1}{2})$

On considère alors le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^3(1) & \xrightarrow{i_1} & \mathbb{R}^4 \\ \Pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\Pi} \\ S^2(\frac{1}{2}) & \xrightarrow{i_2} & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

où  $i_1$  et  $i_2$  sont les injections canoniques et  $\Pi$  la restriction de  $\tilde{\Pi}$  à  $(S^3(1), S^2(\frac{1}{2}))$ .

On munit  $S^3(1)$  de sa métrique riemannienne canonique par la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^4$  et de même pour  $S^2(\frac{1}{2})$  par la métrique euclidienne de  $\mathbb{R}^3$ .

On vérifie alors que, quel que soit le point  $P$  de  $S^2(\frac{1}{2})$ ,  $\Pi^{-1}\{P\}$  est un grand cercle de  $S^3(1)$ .

$\Pi : S^3(1) \rightarrow S^2(\frac{1}{2})$  est appelée une « fibration de Hopf ».

*Remarque 35.* On a imposé ici, par la définition de  $\tilde{\Pi}$ , le fait que l'image de la sphère  $S^3$  de rayon 1 soit la sphère  $S^2$  de rayon  $\frac{1}{2}$ . En multipliant  $\tilde{\Pi}$  par un réel positif on peut « jouer » sur les rayons des sphères comme on le souhaite. Le choix donné par 3.19 est justifié par le fait que l'application :

$$\Pi : (S^3(1), g_{S^3(1)}) \rightarrow (S^2(\frac{1}{2}), g_{S^2(\frac{1}{2})})$$

est alors une **submersion riemannienne**, ce qui permettra de montrer la proposition 15 qui va suivre.

La fibration de Hopf peut aussi être introduite de la manière suivante : le groupe  $SO(2)$ , que l'on identifie au groupe des complexes de module 1 ( $r_\alpha \leftrightarrow e^{i\alpha}$ ) opère naturellement sur  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$  comme **groupe d'isométries** en posant :

$$\forall r_\alpha \in SO(2) \quad r_\alpha \bullet (z_1, z_2) := e^{i\alpha}(z_1, z_2).$$

Il est facile de vérifier que, sous cette opération, les orbites sous  $SO(2)$  sont exactement les grands cercles  $\Pi^{-1}\{P\}$  de la fibration de Hopf définie précédemment. La variété quotient  $S^3(1)/SO(2)$  est alors difféomorphe à  $S^2(\frac{1}{2})$  par le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} S^3(1) & \xrightarrow{\Pi} & S^2(\frac{1}{2}) \\ \Pi' \downarrow & \nearrow f & \\ S^3(1)/SO(2) & & \end{array}$$

où  $\Pi'$  est la submersion riemannienne canonique associée au quotient  $S^3(1)/SO(2)$  lorsque  $g'$  est la métrique sur  $S^3(1)/SO(2)$  « quotientée » de  $g_{S^3(1)}$ . L'application  $f$  est évidemment un difféomorphisme et on peut montrer que c'est en fait une isométrie de  $(S^3(1)/SO(2), g')$  dans  $(S^2(\frac{1}{2}), g_{S^2(\frac{1}{2})})$ .

La fibration de Hopf correspond donc aussi à :

$$\Pi' : S^3(1) \rightarrow S^3(1)/SO(2) \sim S^2(\frac{1}{2}).$$

*Proposition 15.* Quelle que soit l'application  $\varphi : S^2(\frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^2$  :

$$\Delta_{S^3(1)}(\varphi \circ \Pi) = (\Delta_{S^2(\frac{1}{2})}\varphi) \circ \Pi$$

où  $\Delta_{S^3(1)}$  et  $\Delta_{S^2(\frac{1}{2})}$  désignent les laplaciens riemanniens standard définis sur les sphères  $S^3(1)$  et  $S^2(\frac{1}{2})$ .

### Démonstration.

Ce résultat est fondamentalement lié au fait que l'image réciproque par  $\Pi$  de chaque point de  $S^2(\frac{1}{2})$  est un grand cercle de  $S^3(1)$ , autrement dit la fonction  $v : S^2(\frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $v := \text{vol}_{g_{S^3(1)}}(\Pi^{-1}\{P\})$  est une fonction constante égale à  $2\pi$ , et que, de plus,  $\Pi$  est une submersion riemannienne. On s'y prend de la manière suivante :

Puisque  $\Pi$  est une submersion riemannienne, on sait que :  
 $\forall \varphi$  et  $\phi \in C^1(S^2(\frac{1}{2}))$

$$\int_{S^3(1)} \varphi \circ \Pi = \int_{S^2(\frac{1}{2})} \varphi v = 2\pi \int_{S^2(\frac{1}{2})} \varphi \quad \text{et} \quad (3.20)$$

$$(\nabla_{S^2} \varphi \nabla_{S^2} \phi) \circ \Pi = \nabla_{S^3}(\varphi \circ \Pi) \nabla_{S^3}(\phi \circ \Pi) \quad (3.21)$$

Quelle que soit  $\varphi \in C^2(S^2(\frac{1}{2}))$ ,  $\varphi \circ \Pi$  est invariante par l'opération de  $SO(2)$  sur  $S^3(1)$  définie précédemment, et il en est de même pour la fonction  $\Delta_{S^3}(\varphi \circ \Pi)$ . Celle-ci « passe au quotient » et il existe donc une fonction  $h : S^2(\frac{1}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\Delta_{S^3}(\varphi \circ \Pi) = h \circ \Pi$ .

Il s'agit alors de montrer que  $h = \Delta_{S^2} \varphi$  :

D'après 3.20 et 3.21,  $\forall \phi \in C^1(S^2(\frac{1}{2}))$  :

$$\begin{aligned} 2\pi \int_{S^2(\frac{1}{2})} (\Delta_{S^2} \varphi) \phi &= 2\pi \int_{S^2(\frac{1}{2})} \nabla_{S^2} \varphi \nabla_{S^2} \phi = \int_{S^3(1)} (\nabla_{S^2} \varphi \nabla_{S^2} \phi) \circ \Pi \\ &= \int_{S^3(1)} \nabla_{S^3}(\varphi \circ \Pi) \nabla_{S^3}(\phi \circ \Pi) \end{aligned}$$

Donc :

$$2\pi \int_{S^2(\frac{1}{2})} (\Delta_{S^2} \varphi) \phi = \int_{S^3(1)} (\phi \circ \Pi) \Delta_{S^3}(\varphi \circ \Pi) = \int_{S^3(1)} (h\phi) \circ \Pi = 2\pi \int_{S^2(\frac{1}{2})} h\phi$$

Et l'on en déduit bien :  $\Delta_{S^2} \varphi = h$

Cette proposition permet de faire un lien important entre les espaces propres relatifs au laplacien  $\Delta_{S^2(\frac{1}{2})}$  et ceux relatifs au laplacien  $\Delta_{S^3(1)}$ . Ceci est présenté dans le paragraphe qui suit.

### 3.8.2 Les espaces propres de $(S^3(1), g_{S^3(1)})$ et de $(S^2(\frac{1}{2}), g_{S^2(\frac{1}{2})})$

On commence par rappeler le résultat connu sur les espaces propres de  $(S^n(1), g_{S^n(1)})$  où  $g_{S^n(1)}$  désigne la métrique riemannienne standard sur  $S^n(1)$ .

*Proposition 16.*

1. Les valeurs propres du laplacien (des géomètres) de  $(S^n(1), g_{S^n(1)})$  sont données **par la suite**  $(\gamma_k)_{k \in \mathbb{N}}$  où  $\gamma_k = k(k + n - 1)$ .
2. Les espaces propres  $E_k$  correspondants sont formés **des restrictions à  $S^n(1)$  des polynômes homogènes harmoniques de  $\mathbb{R}^{n+1}$  de degré  $k$ .**

On en déduit rapidement que les valeurs propres de  $\Delta_{S^n(\rho)}$  sont données par la suite  $(\gamma_k(\rho))_{k \in \mathbb{N}}$  où  $\gamma_k(\rho) = \rho^{-2}k(k + n - 1)$ .

Les valeurs propres de  $\Delta_{S^3(1)}$  sont donc :  $\gamma_k = k(k + 2)$  pour  $k \in \mathbb{N}$  et celles de  $\Delta_{S^2(\frac{1}{2})}$  :  $\gamma'_l = 4l(l + 1)$  pour  $l \in \mathbb{N}$ , autrement dit  $\gamma'_l = 2l(2l + 2)$ .

D'autre part, la proposition 15 montre que si  $\varphi$  est une fonction propre sur  $S^2(\frac{1}{2})$  pour la valeur propre  $\gamma'_l$  alors  $\varphi \circ \Pi$  est une fonction propre sur  $S^3(1)$  pour la même valeur propre  $\gamma'_l = 2l(2l + 2)$ .

Si l'on note  $F_{2l}$  l'espace propre du  $\Delta_{S^2(\frac{1}{2})}$  correspondant à la valeur propre  $\gamma'_l$ , alors  $E'_{2l} := \{\varphi \circ \Pi \mid \varphi \in F_{2l}\}$  est un sous-espace vectoriel de l'espace propre  $E_{\gamma'_l}$  et  $F_{2l}$  est naturellement isomorphe à  $E'_{2l}$ .

**Chaque espace propre  $E'_{2l}$  de  $S^2(\frac{1}{2})$  s'identifie donc, par la fibration de Hopf, à un sous espace vectoriel de l'espace propre d'indice pair  $E_{2l}$  de  $S^3(1)$  qui correspond à la valeur propre  $2l(2l+2)$ .**

### 3.8.3 Démonstration du fait que, quel que soit $k$ de 1 à 3, $\nabla_{S^3}.L_{k_{S^3}} = 0$ lorsque les $L_{k_{S^3}}$ sont les trois champs de vecteurs qui parallélisent $S^3$

(Nous utilisons ici, la notation plus simple  $L_{k_{S^3}}$  en remplacement de  $L_k|_{S^3}$ ).

Il est immédiat de vérifier que, pour la métrique euclidienne  $\xi$  de  $\mathbb{R}^4$ ,

$$\nabla_{\xi}.L_k = 0.$$

On considère, en un point  $x$  de  $S^3$ , les quatre vecteurs orthogonaux 2 à 2 :  $L_{1_x}, L_{2_x}, L_{3_x}, N_x$  où  $N_x$  est le vecteur normal à  $S^3(\rho)$  :  $N_x = x^1\partial_1 + \dots + x^4\partial_4$ .

On a, pour chaque  $k$  (en omettant d'écrire le point  $x$  en indice) :

$$0 = \nabla_{\xi}.L_k = \xi(L_1, D_{L_1}L_k) + \xi(L_2, D_{L_2}L_k) + \xi(L_3, D_{L_3}L_k) + \xi(N, D_NL_k)$$

où  $D$  désigne la connexion euclidienne de  $\mathbb{R}^4$ .

Mais  $\xi(N, D_NL_k) = \xi(D_NN, L_k) = 0$  car  $D_NN = N$  comme on le vérifie rapidement.

De plus  $\xi(L_i, D_{L_i}L_k) = \xi(L_i, \tilde{D}_{L_i}L_k)$  où  $\tilde{D}$  est la connexion euclidienne de  $\mathbb{R}^4$  induite sur  $S^3$ , ceci car  $\tilde{D}_{L_i}L_k$  est la projection orthogonale sur  $T_x(S^3(\rho))$  de  $D_{L_i}L_k$ .

On en déduit :

$$0 = \xi(L_1, \tilde{D}_{L_1}L_k) + \xi(L_2, \tilde{D}_{L_2}L_k) + \xi(L_3, \tilde{D}_{L_3}L_k) = \nabla_{S^3}.L_{k_{S^3}}.$$

### 3.8.4 Démonstration de la proposition 11 de la section 2.15

**Stabilité des espaces propres  $E_p$  par l'opération des trois champs de vecteurs  $X_1, X_2, X_3$**

D'après la proposition 16 les fonctions propres du laplacien qui constituent l'espace propre  $E_p$  sont les restrictions à  $S^3(\rho)$  des polynômes harmoniques homogènes de degré  $p$  définis sur  $\mathbb{R}^4$ .

Il s'agit donc de montrer que si  $P$  est un tel polynôme alors, quel que soit  $k$  de 1 à 3,  $X_k(P)$  est encore un polynôme harmonique homogène de même degré  $p$ , ceci puisque  $X_k|_{S^3(\rho)}(P|_{S^3(\rho)}) = (X_k(P))|_{S^3(\rho)}$ .

Compte tenu de l'expression des  $X_k$ , il est clair que les  $X_k(P)$  sont homogènes de degré  $p$ .

La difficulté est de montrer que  $X_k(P)$  est harmonique sachant que  $P$  l'est.

Pour cela on développe  $\Delta(X_k(P)) := \sum_{i=1}^4 \partial_i^2(X_k(P))$  où  $\partial_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$ .

$$\text{Si } k = 1, \quad X_1(P) = -x^2\partial_1P + x^1\partial_2P + x^4\partial_3P - x^3\partial_4P.$$

Comme  $\partial_i^2(x^l\partial_mP) = 2\delta_i^l\partial_i\partial_mP + x^l\partial_i^2\partial_mP$ , on a :

$$\sum_{i=1}^4 \partial_i^2(x^l\partial_mP) = x^l \sum_{i=1}^4 \partial_i^2\partial_mP + 2\partial_l\partial_mP = 2\partial_l\partial_mP$$

$$\text{puisque } \sum_{i=1}^4 \partial_i^2\partial_mP = \partial_m\Delta P = 0.$$

On en déduit :

$$\Delta(X_1(P)) = 2(-\partial_2\partial_1P + \partial_1\partial_2P + \partial_4\partial_3P - \partial_3\partial_4P) = 0.$$

On vérifie de même que  $\Delta(X_k(P)) = 0$  pour  $k = 2$  et  $3$ .

Ce qui montre la stabilité de  $E_p$  par l'opération des trois champs de vecteurs  $X_1, X_2, X_3$ .

### Stabilité des espaces $E'_q$ par l'opération des trois champs de vecteurs $X_1, X_2, X_3$

On considère l'application  $\Pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  qui définit la fibration de Hopf donnée par :

$$\begin{aligned} \Pi(x^1, x^2, x^3, x^4) &= (x^1 x^3 + x^2 x^4, x^1 x^4 - x^2 x^3, 1/2((x^3)^2 + (x^4)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2)) \\ &:= (y_1, y_2, y_3). \end{aligned}$$

Les fonctions propres de  $E'_q$  ( $q$  pair) sont les restrictions à  $S^3(\rho)$  des polynômes harmoniques homogènes de degré  $q$  définis sur  $\mathbb{R}^4$  de la forme  $\tilde{P} = P \circ \Pi$  où  $P$  est un polynôme harmonique homogène de degré  $q/2$  défini sur  $\mathbb{R}^3$ .

Il s'agit donc de montrer que, lorsque  $\tilde{P}$  est de la forme précédente, pour  $k$  de 1 à 3,  $X_k(\tilde{P})$  est de la forme  $Q \circ \Pi$  où  $Q$  est un polynôme harmonique homogène de degré  $q/2$  défini sur  $\mathbb{R}^3$ . (On sait déjà, d'après le paragraphe précédent, que  $X_k(\tilde{P})$  est harmonique homogène de degré  $q$ ).

Pour cela, on développe  $X_k(\tilde{P})$  :

$$\begin{aligned} \partial_1(\tilde{P}) &= \left(\frac{\partial P}{\partial y^1} \circ \Pi\right) \frac{\partial y^1}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial P}{\partial y^2} \circ \Pi\right) \frac{\partial y^2}{\partial x^1} + \left(\frac{\partial P}{\partial y^3} \circ \Pi\right) \frac{\partial y^3}{\partial x^1} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y^1} \circ \Pi\right) x^3 + \left(\frac{\partial P}{\partial y^2} \circ \Pi\right) x^4 + \left(\frac{\partial P}{\partial y^3} \circ \Pi\right) (-x^1) \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} \partial_2(\tilde{P}) &= \left(\frac{\partial P}{\partial y^1} \circ \Pi\right) x^4 + \left(\frac{\partial P}{\partial y^2} \circ \Pi\right) (-x^3) + \left(\frac{\partial P}{\partial y^3} \circ \Pi\right) (-x^2) \\ \partial_3(\tilde{P}) &= \left(\frac{\partial P}{\partial y^1} \circ \Pi\right) x^1 + \left(\frac{\partial P}{\partial y^2} \circ \Pi\right) (-x^2) + \left(\frac{\partial P}{\partial y^3} \circ \Pi\right) (x^3) \\ \partial_4(\tilde{P}) &= \left(\frac{\partial P}{\partial y^1} \circ \Pi\right) x^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial y^2} \circ \Pi\right) x^1 + \left(\frac{\partial P}{\partial y^3} \circ \Pi\right) (x^4) \end{aligned}$$

En regroupant les termes puis en simplifiant on obtient, pour  $k = 1$  :

$$\begin{aligned} X_1(\tilde{P}) &= 2(x^1 x^4 - x^2 x^3) \left(\frac{\partial P}{\partial y^1} \circ \Pi\right) - 2(x^1 x^3 + x^2 x^4) \left(\frac{\partial P}{\partial y^2} \circ \Pi\right) \\ &= 2(y^2 \frac{\partial P}{\partial y^1} - y^1 \frac{\partial P}{\partial y^2}) \circ \Pi \end{aligned}$$

il ne reste plus qu'à vérifier que  $P_1 := y^2 \frac{\partial P}{\partial y^1} - y^1 \frac{\partial P}{\partial y^2}$  est harmonique sur  $\mathbb{R}^3$ .

On a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_1}{(\partial y^1)^2} &= y^2 \frac{\partial^3 P}{(\partial y^1)^3} - y^1 \frac{\partial^3 P}{(\partial y^1)^2 \partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^1 \partial y^2} \\ \frac{\partial^2 P_1}{(\partial y^2)^2} &= y^2 \frac{\partial^3 P}{\partial y^1 (\partial y^2)^2} + 2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^1 \partial y^2} - y^1 \frac{\partial^3 P}{(\partial y^2)^3} \\ \frac{\partial^2 P_1}{(\partial y^3)^2} &= y^2 \frac{\partial^3 P}{\partial y^1 (\partial y^3)^2} - y^1 \frac{\partial^3 P}{\partial y^2 (\partial y^3)^2} \end{aligned}$$

d'où :

$$\Delta_{\mathbb{R}^3} P_1 = y^2 \frac{\partial \Delta P}{\partial y^1} - y^1 \frac{\partial \Delta P}{\partial y^2} = 0$$

On vérifie de même la stabilité par  $X_2$  et  $X_3$ .

Ce qui termine la démonstration de la proposition 11.

### 3.9 Démonstration du théorème 5

On ne présente ici que la démonstration détaillée de la partie 3. du théorème. La démonstration des parties 1. et 2. est très proche de celle du théorème 3 donnée dans l'annexe 3.7. La partie 1. n'est évidemment qu'un corollaire de la partie 3. dans laquelle il suffit d'annuler le potentiel électromagnétique  $\Upsilon$ . En fait, le schéma de la démonstration de la partie 3. que l'on va présenter est le même que celui de la partie 3. du théorème 3, seuls quelques termes apparaissent en plus liés à « l'effet de spin ».

**Démonstration du 3. du théorème 5 : « dans un potentiel électromagnétique ».**

La fonction  $a$  vérifie :  $a = \phi\beta$  où  $\phi : \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta \in E_V(\nu)$ .

On a :

$$\square_{g_P} a + S a = 0 \text{ où } g_P = g_0 + h \text{ et } h = \Upsilon^b \otimes X_2^b + X_2^b \otimes \Upsilon^b \quad (3.22)$$

(Dans les calculs qui suivent  $g_P$  sera noté  $g$  pour simplifier l'écriture et  $X_2$  sera noté simplement  $X$ ).

Dans un système de coordonnées standard de la cellule  $\mathcal{C} = \Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$ , on a :

$$\square_g a = -|g|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (g^{ij} |g|^{\frac{1}{2}} \partial_j a) \text{ où } |g| := \det g = \det g_0$$

$$\text{et } g^{ij} = g_0^{ij} - h^{ij} + h_k^i h^{kj} \text{ avec } h^{ij} = \Upsilon^i X^j + \Upsilon^j X^i.$$

Compte tenu des hypothèses :

(i)  $\Upsilon^i = 0$  si  $(i = 4 \text{ et } i > 7)$ ,  $X^j = 0$  si  $(j < 7 \text{ et } j \neq 4)$  et  $X^4 = -1$  puisque  $g_0(X_2, Y) = 1$

Alors :

$$\square_g a + S a = \square_{g_0} a + S a + (*) + (**) \quad (3.23)$$

$$\text{où } (*) := |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} h^{ij} \partial_j a) \text{ et } (**) := -|g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} h_k^i h^{kj} \partial_j a).$$

Comme  $g_0$  est une métrique « produit » sur  $\Theta \times S^1(\delta) \times S^3(\rho) \times V$  on a :

$$\begin{aligned} \square_{g_0} a + S a &= (\square_\Theta + \square_{S^1 \times S^3} + \Delta_V)(\phi\beta) + S \phi\beta \\ &= \beta(\square_\Theta \phi + (\gamma - \lambda + \nu + S)\phi) = \beta(\square_\Theta \phi + M^2 \phi) \end{aligned} \quad (3.24)$$

#### 1. Étude de (\*).

$$(*) = (*_1) + (*_2) \text{ où } (*_1) := |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} h^{ij} \phi \partial_j \beta)$$

$$\text{et } (*_2) := |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} h^{ij} \beta \partial_j \phi).$$

$$(*_1) = |g_0|^{-\frac{1}{2}} (\partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} \Upsilon^i X^j \phi \partial_j \beta) + \partial_j (|g_0|^{\frac{1}{2}} \Upsilon^i X^j \phi \partial_i \beta)) = 0$$

$$\text{car } X^j \partial_j \beta = 0 \text{ et } \Upsilon^i \partial_i \beta = 0 \text{ d'après (i) puisque } \partial_i \beta = 0 \text{ si } i \leq 7.$$

D'autre part :

$$(*_2) := (*_{2_1}) + (*_{2_2}) \text{ où } (*_{2_1}) = |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} \Upsilon^i X^j \beta \partial_j \phi)$$

$$\text{et } (*_{2_2}) = |g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_j (|g_0|^{\frac{1}{2}} \Upsilon^i X^j \beta \partial_i \phi).$$

$$(*_{2_1}) = -|g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} \Upsilon^i \beta \partial_4 \phi) \text{ puisque } \partial_j \phi = 0 \text{ si } j > 7 \text{ et } X^4 = -1 \text{ (} \partial_4 \phi := \frac{\partial \phi}{\partial u} \text{)}.$$

Alors, comme  $\Upsilon^i = 0$  pour  $i \geq 7$  :

$$\begin{aligned} (*_{21}) &= -\beta(|g_0|^{-\frac{1}{2}}(\partial_i(|g_0|^{\frac{1}{2}}\Upsilon^i))\partial_4\phi + \Upsilon^i\partial_i\partial_4\phi) \\ &= -\beta((\nabla_{g_0} \cdot \Upsilon)\partial_4\phi + \Upsilon(\partial_4\phi)). \end{aligned}$$

D'autre part, puisque  $X^4 = -1$  :

$$(*_{22}) = -|g_0|^{-\frac{1}{2}}\partial_4(|g_0|^{\frac{1}{2}}\beta\Upsilon(\phi)) + \sum_{j>7} |g_0|^{-\frac{1}{2}}\partial_j(|g_0|^{\frac{1}{2}}X^j\beta\Upsilon(\phi)).$$

Mais, puisque  $\partial_j(\Upsilon(\phi)) = 0$  si  $j > 7$  :

$$\sum_{j>7} |g_0|^{-\frac{1}{2}}\partial_j(|g_0|^{\frac{1}{2}}X^j\beta\Upsilon(\phi)) = \Upsilon(\phi)\nabla_{g_0} \cdot (\beta X) = 0.$$

Alors, puisque  $|g_0|, \beta$  et les  $\Upsilon^i$  ne dépendent pas de  $u$  :

$$(*_{22}) = -\beta\Upsilon(\partial_4\phi).$$

Finalement :

$$(*) = (*_1) + (*_{21}) + (*_{22}) = -\beta((\nabla_{g_0} \cdot \Upsilon)\partial_4\phi + 2\Upsilon(\partial_4\phi)) \quad (3.25)$$

## 2. Étude de (\*\*).

$$\begin{aligned} (**) &= -|g_0|^{-\frac{1}{2}}\partial_i(|g_0|^{\frac{1}{2}}h_k^i h^{kj}\partial_j a) \\ &= -|g_0|^{-\frac{1}{2}}\partial_i(|g_0|^{\frac{1}{2}}(\Upsilon^i X_k + \Upsilon_k X^i)(\Upsilon^k X^j + \Upsilon^j X^k)\partial_j a) \end{aligned}$$

Alors, puisque  $\Upsilon^k X_k = 0$  et  $X^k X_k = 0$  :

$$(**) = -|g_0|^{-\frac{1}{2}}\partial_i(|g_0|^{\frac{1}{2}}X^i X^j \Upsilon_k \Upsilon^k \partial_j(\phi\beta))$$

Mais, comme  $\Upsilon_k \Upsilon^k$  ne dépend pas des variables de  $S^1 \times V$  :

$$(**) = -\Upsilon_k \Upsilon^k |g_0|^{-\frac{1}{2}}(\partial_i(|g_0|^{\frac{1}{2}}X^i X^j \beta \partial_j \phi) + \partial_i(|g_0|^{\frac{1}{2}}X^i X^j \phi \partial_j \beta)).$$

Comme  $X^j \partial_j \phi = -\partial_4 \phi$  puisque  $\partial_j \phi = 0$  pour  $j > 7$  et  $X(\beta) = 0$ , on obtient :

$$(**) = \Upsilon_k \Upsilon^k |g_0|^{-\frac{1}{2}}\partial_i(|g_0|^{\frac{1}{2}}X^i \beta \partial_4 \phi).$$

En considérant  $i = 4$  puis  $i > 7$ , on trouve :

$$(**) = -\Upsilon_k \Upsilon^k (\beta \partial_4^2 \phi - |g_0|^{-\frac{1}{2}}(\sum_{i>7} \partial_i(|g_0|^{\frac{1}{2}}X^i \beta))\partial_4 \phi).$$

Ce que l'on peut écrire :

$$(**) = -\Upsilon_k \Upsilon^k (\beta \partial_4^2 \phi - (\nabla_{g_0} \cdot (\beta X))\partial_4 \phi).$$

Et, puisque  $\nabla_{g_0} \cdot (\beta X) = X(\beta) + \beta \nabla_{g_0} \cdot X = 0$  :

$$(**) = -\Upsilon_k \Upsilon^k \beta \partial_4^2 \phi \quad (3.26)$$

## 3. Fin de la démonstration de 3.

D'après 3.22, 3.23, 3.24, 3.25 et 3.26 on a :

$$0 = \square_g a + S a = (\square_\Theta \phi + M^2 \phi - (\nabla_{g_0} \cdot \Upsilon)\partial_4 \phi - 2\Upsilon(\partial_4 \phi) - \Upsilon_k \Upsilon^k \partial_4^2 \phi)\beta.$$

D'où :

$$0 = \square_\Theta \phi + M^2 \phi - (\nabla_{g_0} \cdot \Upsilon)\partial_4 \phi - 2\Upsilon(\partial_4 \phi) - \Upsilon_k \Upsilon^k \partial_4^2 \phi \quad (3.27)$$

(a) Étude du terme :  $(\nabla_{g_0} \cdot \Upsilon)\partial_4 \phi + 2\Upsilon(\partial_4 \phi)$ .

$\Upsilon$  a été choisi sous la forme ;

$$\Upsilon = A + \varrho C \quad \text{où} \quad A = \sum_{i=0}^3 A^i \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{et} \quad C = \sum_{k=1}^3 B_k L_{k_{S^3}}$$



$\varrho$  est la constante gyromagnétique.

$A$  est un champ de vecteurs défini sur  $\Theta$ .

$C$  est un champ de vecteurs tangent à  $S^3(\rho)$ . ( $A$  et  $C$  sont considérés définis sur  $\Theta \times S^3(\rho)$ ).

On a :

$$(\nabla_{g_0} \cdot \Upsilon) \partial_4 \phi + 2\Upsilon(\partial_4 \phi) = \sum_{i \leq 7} (|g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} \Upsilon^i) \partial_4 \phi + 2\Upsilon^i \partial_i \partial_4 \phi).$$

Ce que l'on peut écrire, puisque  $\Upsilon^4 = 0$ , sous la forme :

$$\sum_{i=0}^3 (|g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} \Upsilon^i) \partial_4 \phi + 2\Upsilon^i \partial_i \partial_4 \phi) + \sum_{i=5}^7 (|g_0|^{-\frac{1}{2}} \partial_i (|g_0|^{\frac{1}{2}} \Upsilon^i) \partial_4 \phi + 2\Upsilon^i \partial_i \partial_4 \phi).$$

D'où :

$$(\nabla_{g_0} \cdot \Upsilon) \partial_4 \phi + 2\Upsilon(\partial_4 \phi) = (\nabla_{\Theta} \cdot A) \partial_4 \phi + 2A \partial_4 \phi + \varrho (\nabla_{S^3} \cdot C) \partial_4 \phi + 2\varrho C(\partial_4 \phi).$$

Mais  $\nabla_{S^3} \cdot C = \sum_{k=1}^3 B_k (\nabla_{S^3} L_{k_{S^3}}) = 0$  puisque  $\nabla_{S^3} L_{k_{S^3}} = 0$  (cf. 3.8.3).

Donc :

$$(\nabla_{g_0} \cdot \Upsilon) \partial_4 \phi + 2\Upsilon(\partial_4 \phi) = (\nabla_{\Theta} \cdot A) \partial_4 \phi + 2A \partial_4 \phi + 2\varrho C(\partial_4 \phi) \quad (3.28)$$

(b) Étude du terme  $\Upsilon_k \Upsilon^k \partial_4^2 \phi$ .

$A$  et  $C$  étant  $g_0$ -orthogonaux on a :

$$\Upsilon_k \Upsilon^k = A_k A^k + \varrho^2 C_k C^k.$$

Mais, puisque les trois champs de vecteurs  $L_{j_{S^3}}$  sont deux à deux  $g_0$ -orthogonaux et que  $g_{0_{S^3}}(L_{j_{S^3}}, L_{j_{S^3}}) = \rho^2$  où  $\rho$  est le rayon de la sphère  $S^3(\rho)$ , on a :

$$C_k C^k = g_0(C, C) = \rho^2 \sum_{j=1}^3 B_j^2.$$

D'où :

$$\Upsilon_k \Upsilon^k \partial_4^2 \phi = (A_k A^k + \varrho^2 \rho^2 \sum_{j=1}^3 B_j^2) \partial_4^2 \phi \quad (3.29)$$

Finalement l'équation 3.27 s'écrit :

$$0 = \square_{\Theta} \phi + M^2 \phi - (\nabla_{g_0} \cdot A) \partial_4 \phi - 2A(\partial_4 \phi) - A_k A^k \partial_4^2 \phi - (\alpha) \quad (3.30)$$

Où  $(\alpha) := 2\varrho C(\partial_4 \phi) + \varrho^2 \rho^2 (\sum_{k=1}^3 B_k^2) \partial_4^2 \phi$

C'est à dire :

$$(\alpha) := 2\varrho \sum_{k=1}^3 B_k S_k(\partial_4 \phi) + \varrho^2 \rho^2 (\sum_{k=1}^3 B_k^2) \partial_4^2 \phi$$

où les  $S_k$  ont été précisés dans la définition 38.

L'équation 3.30 se met aussi sous la forme :

$$0 = - \sum_{j=0}^3 \varepsilon_j \left( \frac{\partial}{\partial x^j} + A^j \frac{\partial}{\partial u} \right)^2 \phi + M^2 \phi - (\alpha) \quad (3.31)$$

où  $\varepsilon_0 = -1$   $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = 1$

Pour obtenir l'équation en  $a_c$  donnée par le théorème, on considère l'isomorphisme (cf. 2.10) :  $\mathbb{C}_{\lambda, \nu} : E_{S^1(\delta)} \otimes E_p \rightarrow E_p^{\mathbb{C}}$  où  $E_p = E_{S^3(\rho)}(\nu)$

On vérifie facilement que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}_{\lambda, \nu} \circ ((\square_{\Theta} \phi)_x(\cdot)) &= (\square_{\Theta} a_c)(x) \\
\mathbb{C}_{\lambda, \nu} \circ ((\frac{\partial \phi}{\partial u})_x(\cdot)) &= -iQ^+ a_c(x) \\
\mathbb{C}_{\lambda, \nu} \circ ((\frac{\partial^2 \phi}{\partial u^2})_x(\cdot)) &= -Q^{+2} a_c(x)
\end{aligned}$$

En composant, pour chaque  $x \in \Theta$ , chaque membre de l'équation 3.31 par  $\mathbb{C}_{\lambda, \nu}$ , on obtient l'équation 2.50 du théorème 5 :

$$\sum_{j=0}^3 \varepsilon_j (i \frac{\partial}{\partial x^j} + Q^+ \Upsilon^j)^2 a_c + M^2 a_c - 2Q Q^+ \sum_{k=1}^3 B^k \hat{S}_k(a_c) + Q^{+2} Q^2 \rho^2 |B|^2 a_c = 0$$

### 3.10 Le choix d'une variété pseudo-riemannienne

#### 1. La structure de variété.

##### (a) L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ .

Si nous voulons étudier une application définie sur un ensemble fini et à valeurs dans un autre ensemble fini, ceux-ci ayant un très grand nombre d'éléments et étant munis, par exemple, d'une relation d'ordre, nous disposons a priori de très peu de moyens. Un procédé consiste à « boucher intelligemment les trous » dans ces deux ensembles en rajoutant des éléments virtuels puis à prolonger l'application sur ces deux nouveaux ensembles maintenant « continus ». La première étape est traitée mathématiquement précisément dans la construction de  $\mathbb{Q}$  puis de  $\mathbb{R}$  à partir de  $\mathbb{N}$ . Cette construction non-triviale (surtout pour passer de  $\mathbb{Q}$  à  $\mathbb{R}$ ) permet d'introduire les notions de « limite », de « dérivée », d'« équation différentielle », etc., attachées aux fonctions définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et cela donne une très grande puissance au procédé d'étude des fonctions, celles-ci pouvant être, si besoin est, restreintes ensuite aux ensembles finis du problème d'origine. En fait, la construction de  $\mathbb{R}$ , purement axiomatique, introduit tout l'outillage de ce que l'on appelle « l'analyse réelle ».

##### (b) L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ .

La construction de  $\mathbb{R}^n$  comme ensemble de  $n$ -uplets de réels est une trivialité, mais elle introduit la notion importante de **dimension** par sa structure naturelle d'espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . La topologie standard de  $\mathbb{R}^n$  (globale) est « pauvre ». L'analyse différentielle développée sur  $\mathbb{R}$  s'étend naturellement sur  $\mathbb{R}^n$ .

##### (c) Les variétés topologiques.

Une variété topologique est, par définition, un espace topologique dont tout point admet un voisinage homéomorphe à  $\mathbb{R}^n$ . L'intérêt de cette structure est qu'elle garde les propriétés topologiques locales de  $\mathbb{R}^n$  mais permet des topologies globales très variées. Il n'y a pas de structure algébrique canonique sur une variété topologique contrairement à sur  $\mathbb{R}^n$ . Ceci est un bon point pour la représentation de l'espace-temps, la structure algébrique de  $\mathbb{R}^n$  s'étant avérée trop rigide pour avoir un sens physique (ce qui a amené à la construction de la relativité générale). Bien entendu, tous les outils d'analyse liés à la topologie peuvent être utilisés (continuité, etc.), cependant, l'analyse différentielle sur  $\mathbb{R}^n$  (qui vient de celle de  $\mathbb{R}$ ), ne s'étend pas aux variétés topologiques. (On peut, localement, se ramener à  $\mathbb{R}^n$  par un homéomorphisme, mais le calcul différentiel défini comme ceci sur un ouvert de la variété topologique, dépend complètement du choix de l'homéomorphisme et, comme a priori aucun n'est privilégié, ceci n'a pas d'intérêt). Pour introduire correctement l'analyse différentielle sur une variété topologique, il est nécessaire de lui donner une structure supplémentaire par l'intermédiaire d'un « atlas différentiable ».

##### (d) Les variétés différentielles.

Une variété différentielle est, par définition, un couple formé d'une variété topologique et d'un « atlas complet » défini sur cette variété (on renvoie le lecteur aux ouvrages spécialisés pour une définition précise). Un atlas est un ensemble de « cartes » (homéomorphismes d'un ouvert de la variété topologique dans un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ) et

cette notion a un sens physique très important. Le choix d'une carte de cet atlas (on dit aussi : un système de coordonnées) peut être vu comme le choix d'un « observateur » qui traduit ce qui se passe sur un ouvert de la variété en le ramenant sur  $\mathbb{R}^n$ . Ce qui est conceptuellement très important, c'est que la donnée d'un atlas complet (différentiable, de classe  $C^k$ , etc.) sur la variété topologique permet de reconstruire une grande partie de l'analyse différentielle sur cette variété et ceci **indépendamment de tout choix particulier de carte dans l'atlas**. Cette reconstruction commence par celle d'un « espace tangent » en chaque point de la variété, qui est un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  dont la dimension correspond à la dimension topologique de la variété (cet espace tangent est construit indépendamment de tout choix particulier de carte dans l'atlas). À partir de là, tous les « objets » de l'analyse différentielle se redéfinissent sans difficultés : champ de tenseurs, différentielles, etc.). Toutes ces notions sont telles qu'elles ne dépendent pas d'une carte particulière de l'atlas, autrement dit, du « regard » d'un observateur sur la variété. En résumé, une variété différentielle est un espace topologique sur lequel est défini un ensemble (complet) d'observateurs de sorte que l'essentiel des outils de l'analyse connue sur  $\mathbb{R}^n$  puisse être utilisé. De plus, toutes les notions de cette analyse ont leurs définitions indépendantes d'un choix d'observateur. Il n'y a, a priori, aucune structure algébrique sur (l'ensemble sous-jacent à) la variété, donc aucune notion physiquement artificielle qui s'impose (comme c'était le cas, par exemple, dans  $\mathbb{R}^n$  pour les objets que sont : les droites, les sous-espaces affines, l'origine, etc.), ceci laisse une grande liberté pour introduire des notions qui, elles, auront un sens physique.

2. La structure de variété pseudo-riemannienne.

Une variété pseudo-riemannienne est un couple formé d'une variété différentielle  $\mathcal{M}$  et d'un champ  $g$  de formes quadratiques défini sur cette variété. Le champ de formes quadratiques est la donnée, en tout point  $x$  de  $\mathcal{M}$ , d'une forme bilinéaire symétrique  $g_x$  sur l'espace tangent en ce point. Nous n'imposons a priori aucune restriction sur la signature de  $g_x$  ni même sur le fait qu'elle soit dégénérée ou non. **Dans la théorie que nous présentons dans ce papier, toute la physique est décrite par la seule donnée d'une variété pseudo-riemannienne.** Tous les « objets » habituels sont définis à partir de  $g$ . Le choix d'un champ de formes quadratiques est donc un fait important, il est essentiellement justifié par la facilité qu'il donne à la définition des notions de « distance » et de « temps », ceci en laissant de grandes possibilités de « manipulations ». Il est évidemment nécessaire qu'une théorie physique finisse par se ramener aux notions standards de « distance » et de « temps » liées à un observateur. Bien entendu, il ne faudrait pas hésiter à « essayer » d'autres objets qu'un champ de formes quadratiques si besoin est, mais, pour le moment, le choix qui a été fait a l'air de convenir parfaitement.

3. En résumé.

Même s'il est concevable que l'« espace-temps » puisse se décrire par un ensemble fini muni d'une structure  $(X, \text{Struct})$ , il est probablement beaucoup plus intéressant, dans le seul but de décrire cette structure, de « plonger »  $(X, \text{Struct})$  dans une variété pseudo-riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$  de manière à pouvoir utiliser toute la puissance de l'analyse mathématique développée dans cette dernière. Je ne suis pas sûr, par ailleurs, qu'il y ait beaucoup

d'intérêt à préciser un éventuel couple  $(X, \text{Struct})$  et son plongement dans  $(\mathcal{M}, g)$ .

On a donc choisi dans ce papier de représenter l'univers par une variété pseudo-riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$  de « grande » dimension. Comme il a été précisé dans l'introduction, cette variété sera considérée « totalement anarchique ». Le lecteur pourra se référer au chapitre 14 du manuscrit [4] où est précisé ce que l'on entend par « variété totalement anarchique » dans le cas où celle-ci est lorentzienne de dimension 4 (ce qui s'étend naturellement à notre variété  $(\mathcal{M}, g)$ ). Cette variété est « parsemée » de singularités de différents types (big-bangs, big-crunchs, trous-noirs, etc.). La singularité « big-bang » que l'on semble observer (à peu près homogène et isotrope « à grande échelle ») n'est qu'un détail de cet univers « anarchique ». Ce point de vue est assez différent de celui couramment admis en cosmologie, bien qu'il ne change rien de fondamental dans ce domaine. Le point de vue que nous adoptons exclut tout essai de précision dans la représentation globale de l'univers.

### 3.11 Déterminisme et approximations

On considère un domaine typé  $(\mathcal{D}, g, \mathcal{A})$  (voir le préliminaire mathématique) et l'on rappelle qu'un « type » est la donnée d'une condition géométrique imposée sur  $(\mathcal{D}, g)$ . Il est naturel de dire qu'un tel domaine typé est **totalement déterministe** si la connaissance du tenseur  $g$  sur un sous-domaine  $\mathcal{D}'$  de  $\mathcal{D}$  détermine complètement  $g$  sur  $\mathcal{D}$ , autrement dit : si un couple  $(\mathcal{D}, g')$  vérifie la même condition géométrique que celle qui donne le type de  $(\mathcal{D}', g)$  et si  $g' = g$  sur  $\mathcal{D}'$  alors, nécessairement,  $g = g'$  sur  $\mathcal{D}$ . Vérifier qu'un domaine typé est totalement déterministe est en général un problème très complexe que l'on présente souvent sous la dénomination de « problème de Cauchy ». Le type de problème de Cauchy que l'on vient d'énoncer peut se généraliser : le domaine  $\mathcal{D}'$  peut être, par exemple, remplacé par une « hypersurface » de  $\mathcal{D}$ , le domaine  $\mathcal{D}$  lui-même peut ne pas être imposé a priori, etc. mais ceci demande une présentation rigoureuse assez longue à expliquer.

Si, mathématiquement, ces problèmes sont intéressants, la difficulté de leurs résolutions (même dans des cas d'énoncés très simples) liée essentiellement pour nous au fait que la variété  $\mathcal{M}$  est de grande dimension et est localement difféomorphe à un produit  $\Theta \times K$  (où  $\Theta$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^4$  et  $K$  une variété compacte) fait que nous n'abordons pas ce point de vue dans ce papier. Nous nous contentons dans cette annexe de préciser succinctement quelques méthodes d'approximation qui permettent de rendre les domaines typés que l'on définit « suffisamment déterministes » pour être humainement intéressants. Ces « méthodes d'approximation » ne sont autres que celles couramment utilisées en physique standard et ici adaptées aux espaces considérés.

Prenons comme exemple le cas d'un domaine de type « fluide ». Les équations données par le théorème 1 ne sont certainement pas « suffisamment déterministes ». Les opérateurs différentiels sont relatifs au tenseur métrique  $g$  lui-même. Un cas particulier important pour lequel ces équations peuvent devenir exploitables est celui où, dans un domaine de coordonnées spécifique  $\Theta \times K$ , le tenseur métrique  $g$  s'écrit sous la forme  $g_{ij} = g_{0ij} + h_{ij}$  où  $g_0$  est une métrique de potentiel neutre telle que  $g_0|_{\Theta}$  est la métrique de Minkovski et les fonctions  $h_{ij}$  sont « 1 (les  $\partial_k h_{ij}$  étant eux aussi contrôlés). Les équations du théorème 1 peuvent alors être réécrites

en approximation en remplaçant les opérateurs différentiels relatifs à  $g$  par ceux relatifs à  $g_0$ . Il faut cependant vérifier que les termes supprimés par ce procédé (qui viennent des symboles de Christoffel) sont bien « négligeables » par rapport aux termes restant. Ceci est encore loin d'être suffisant pour rendre les équations exploitables en un sens classique, les termes de « pression » donnent trop d'« inconnues » par rapport au nombre d'équations. Les cas étudiés sont alors ceux où l'on suppose, par exemple, que ces termes sont nuls (ou négligeables) ce qui correspond au cas d'un fluide vraiment parfait (définition 11), ou bien, plus généralement, ceux où l'on impose des équations supplémentaires sur les termes de pression (équations d'état). Si maintenant, on suppose que les fonctions inconnues restantes ne dépendent pas, dans le système de coordonnées  $\Theta \times K$ , des « variables » de  $K$ , on retrouve les équations sur les fluides (chargés électriquement ou non) de la physique classique (c'est ainsi que la physique newtonienne apparaît comme approximation de la théorie de la relativité générale standard, elle-même approximation de la physique présentée ici).

Les approximations que l'on vient de décrire, liées au fait que le tenseur métrique est « proche » d'une métrique de potentiel neutre  $g_0$  ont pour principal intérêt celui de montrer que les équations de la physique classique (qui, elles, sont suffisamment déterministes) se déduisent bien de celles obtenues dans le théorème 1. **Les « approximations » qui consistent à donner explicitement un tenseur métrique  $g$  (« approché ») sur un domaine  $\mathcal{D}$  sont en fait bien plus intéressantes**, elles permettent des calculs précis dans un cadre général (qui ne suppose pas nécessairement que  $g$  est « proche » d'un  $g_0$ ). Ce sont ces « types approximatifs » que l'on utilise en relativité générale standard sous la dénomination de « solution exacte de l'équation d'Einstein » et s'adaptent sans difficultés aux domaines  $\mathcal{D}$  de la variété  $\mathcal{M}$  de grande dimension que l'on considère ici, mais c'est surtout les types « potentiels » que l'on définit en 1.4 qui permettent la description précise de nombreux phénomènes physiques par l'intermédiaire de leurs géodésiques comme on l'explique en 1.3 et qui redonnent simplement, en approximation, la physique newtonienne et l'électromagnétisme standard.

C'est, à mon avis, en continuant dans ce sens, par la donnée explicite de « métriques »  $g$  sur des domaines  $\mathcal{D}$ , que l'on étudiera efficacement des domaines plus complexes de type « fluide avec pression ou autre » qui concernent le chapitre 1 de ce papier. Le chapitre 2 sur les phénomènes quantiques ne considère que des domaines typés définis à partir du tenseur  $g$ .

Il est important de noter que, techniquement, c'est en imposant des **invariances par opérations de groupes** que l'on construit des domaines typés suffisamment simples pour être intéressants. En voici quelques exemples :

- La condition 2 donnée dans la définition 10 d'un domaine de type fluide, qui traduit le fait que l'on néglige les effets quantiques de l'électromagnétisme, peut s'écrire en disant que le tenseur métrique  $g$  est invariant par le groupe des difféomorphismes engendré par le champ de vecteurs  $Y$ .
- En divers endroits de ce papier, des conditions imposées à des fonctions définies sur une cellule type  $\mathcal{C} = \Theta \times K_1 \times \cdots \times K_l$  (qui, souvent, servent à définir le tenseur métrique) sont énoncées en disant que ces fonctions ne dépendent pas des variables de  $K_i$ . Ceci se traduit par le fait que ces fonctions sont invariantes par l'opération d'un groupe qui opère transitivement sur  $K_i$  et ceci peut aussi s'écrire en faisant opérer le groupe sur la variété  $\mathcal{M}$ .

- De nombreux exemples importants de « domaines typés » en relativité générale standard (que l'on adapte sans difficultés à  $\mathcal{M}$  comme on l'a déjà vu) sont définis en supposant des invariances par des groupes classiques. On peut citer : les domaines de Schwarzschild, de Reissner-Nordström, de Friedmann, invariants par l'opération du groupe  $SO(3)$  ainsi que l'exemple présenté en 1.7, les domaines de Kerr, invariants par  $SO(2)$ , etc.

Il serait intéressant de détailler toutes ces méthodes d'approximation bien plus que ne l'on fait les quelques lignes de cette annexe, mais ceci est laissé en exercice pour le lecteur (exercice parfois difficile).

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	3
<b>Introduction</b>	4
<b>Notations utilisées</b>	11
<b>1 La physique non quantique</b>	<b>15</b>
1.1 Les domaines de type « fluide » ou « potentiel »	15
1.2 Type « fluide » à partir de la courbure d'Einstein	15
1.2.1 Les objets physiques définis canoniquement dans un domaine de type « fluide »	17
1.2.2 Les équations générales sur les fluides	18
1.2.3 Les fluides particuliers	19
1.3 Type « potentiel » à partir de la courbure d'Einstein	22
1.4 Exemples de domaines donnés par le tenseur $g$	23
1.4.1 Quelques notations et définitions	24
1.4.2 Les métriques représentant les potentiels	25
1.5 Les géodésiques des domaines de type « potentiel »	32
1.5.1 Les géodésiques d'un domaine de type potentiel sans électromagnétisme	32
1.5.2 Les géodésiques d'un domaine de type potentiel électromagnétique	35
1.6 Courbure de Ricci et courbure scalaire	38
1.6.1 Les potentiels actifs sans électromagnétisme d'indice 2	38
1.6.2 Les potentiels électromagnétiques	38
1.7 Remarques sur le domaine de type « potentiel newtonien »	39
1.8 Un « fluide statique vraiment parfait »	40
<b>2 Les phénomènes quantiques</b>	<b>44</b>
2.1 Introduction	44
2.2 Le « type géométrique » fondamental	48
2.3 L'équation fondamentale...	49
2.4 L'approximation linéaire	50
2.5 Classification des métriques oscillantes	51
2.5.1 Rappels de quelques résultats de théorie spectrale sur les variétés riemanniennes compactes	52
2.5.2 Les métriques oscillantes élémentaires	53



2.6	Les constantes associées . . . . .	54
2.7	Affinement de la classification . . . . .	56
2.8	Des exemples importants . . . . .	60
2.8.1	Les métriques oscillantes élémentaires homogènes d'ordre 1 dans un potentiel neutre . . . . .	60
2.8.2	Le cas plus général des métriques oscillantes élémentaires associées à $E_{\lambda,\mu}$ . . . . .	62
2.9	La charge électrique relative . . . . .	63
2.10	Les fonctions canoniques associées . . . . .	63
2.11	Les équations de Klein-Gordon . . . . .	65
2.12	La fonction d'état . . . . .	68
2.12.1	Les $\varepsilon$ -approximations . . . . .	70
2.13	Les singularités . . . . .	74
2.13.1	Les singularités vues « simplement » . . . . .	75
2.13.2	Les singularités vues comme des effondrements de métriques oscillantes . . . . .	76
2.14	La partie probabiliste . . . . .	78
2.14.1	La notion de « densité de singularités » . . . . .	82
2.15	Le spin . . . . .	84
2.15.1	Les valeurs propres et les espaces propres du laplacien sur la sphère $S^3(\rho)$ ainsi que ceux liés à la fibration de Hopf . . . . .	84
2.15.2	Trois champs de vecteurs qui parallélisent $S^3$ et les endomorphismes des espaces propres qui leurs sont canoniquement associés . . . . .	84
2.15.3	Les domaines de type « métrique oscillante avec spin dans un potentiel » . . . . .	86
2.15.4	Les équations . . . . .	87
2.15.5	Les $\varepsilon$ -approximations . . . . .	89
2.15.6	La probabilité de présence d'une singularité dans un domaine de type « métrique oscillante élémentaire avec spin dans un potentiel » . . . . .	90
2.15.7	Quelques exemples . . . . .	92
2.16	Les métriques oscillantes à masse nulle . . . . .	95
2.17	Le champ de Higgs ? . . . . .	96
2.18	Grandeurs et mesures . . . . .	97
2.18.1	Un exemple . . . . .	97
2.18.2	Les grandeurs liées à l'espace apparent $I \times \Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ et leurs mesures . . . . .	98
2.18.3	Les grandeurs liées aux variétés compactes de la cellule type et leurs mesures . . . . .	105
2.19	Mesure de spin . . . . .	106
2.19.1	Faisceau de métrique oscillante et « état de spin » . . . . .	106
2.19.2	L'appareil de Stern-Gerlach idéalisé. La mesure de spin . . . . .	108
2.19.3	L'appareil de Stern-Gerlach idéalisé vu comme appareil de mesure correspondant à la définition (47) . . . . .	115
2.20	L'intrication quantique . . . . .	117
2.20.1	L'expérience de type A,G,R [1] vue par la physique quantique standard . . . . .	118
2.20.2	L'intrication quantique décrite par notre théorie . . . . .	120
2.21	Quelques remarques pour la suite . . . . .	126

2.21.1	Où l'on abandonne l'approximation linéaire mais on continue à négliger l'influence éventuelle des singularités sur les équations qui régissent les métriques conformes à un potentiel . . . . .	127
2.21.2	Les singularités et leurs influences . . . . .	128
2.21.3	Durée de vie, création, annihilation . . . . .	131
<b>3</b>	<b>Annexes</b>	<b>133</b>
3.1	Démonstration du théorème 1 . . . . .	133
3.2	Démonstration des propriétés 1, 2 et 3 . . . . .	137
3.3	Démonstration de la proposition 5 . . . . .	138
3.4	Démonstration de la proposition 6 . . . . .	139
3.5	Un exemple très simple d'approximation . . . . .	141
3.6	Démonstration de la proposition 8 . . . . .	141
3.7	Démonstration du théorème 3 . . . . .	142
3.8	La sphère $S^3$ . . . . .	145
3.8.1	La fibration de Hopf . . . . .	145
3.8.2	Les espaces propres de $(S^3(1), g_{S^3(1)})$ et de $(S^2(\frac{1}{2}), g_{S^2(\frac{1}{2})})$ . . . . .	147
3.8.3	Démonstration du fait que, quel que soit $k$ de 1 à 3, $\nabla_{S^3}.L_{k_{S^3}} = 0$ lorsque les $L_{k_{S^3}}$ sont les trois champs de vecteurs qui parallélisent $S^3$ . . . . .	148
3.8.4	Démonstration de la proposition 11 de la section 2.15 . . . . .	148
3.9	Démonstration du théorème 5 . . . . .	150
3.10	Le choix d'une variété pseudo-riemannienne . . . . .	154
3.11	Déterminisme et approximations . . . . .	156

# Références

- [1] A.Aspect-P.Grangier-G.Roger. Experimental realization of Einstein-Podolsky-Rosen-Bohm Gedankenexperiment : A new violation of Bell's Inequalities. *physical review letters*, vol 49, Number 2, 1982.
- [2] E.Gourgoulhon. Relativité restreinte, des particules à l'astrophysique. *CNRS-éditions*.
- [3] J.L.Basdevant-J.Dalibard. Mécanique quantique. *les éditions de l'école Polytechnique*.
- [4] Michel. Petit manuel de relativité générale à l'usage des gens qui connaissent la géométrie riemannienne. 2009.
- [5] Michel. La physique vue autrement – L'univers sans foi ni loi. 2012.
- [6] Michel. La physique vue autrement – L'univers sans foi ni loi. 2014.
- [7] Stéphane. A mathematicians' view of geometrical unification of classical physics in high-dimensional space-time. 2010. Accessible à l'adresse : <http://arxiv.org/abs/1010.1516>.
- [8] S.W.Hawking-BFR.Ellis. The large scale structure of space-time. *Cambridge monographs on mathematical physics*.
- [9] Y.Choquet-Bruhat. General relativity and the Einstein Equation. *Oxford science publications*.
- [10] Zoé. L'univers sans foi ni loi. Accessible à l'adresse : <http://luniverssansfoinilo.blogspot.fr/>.